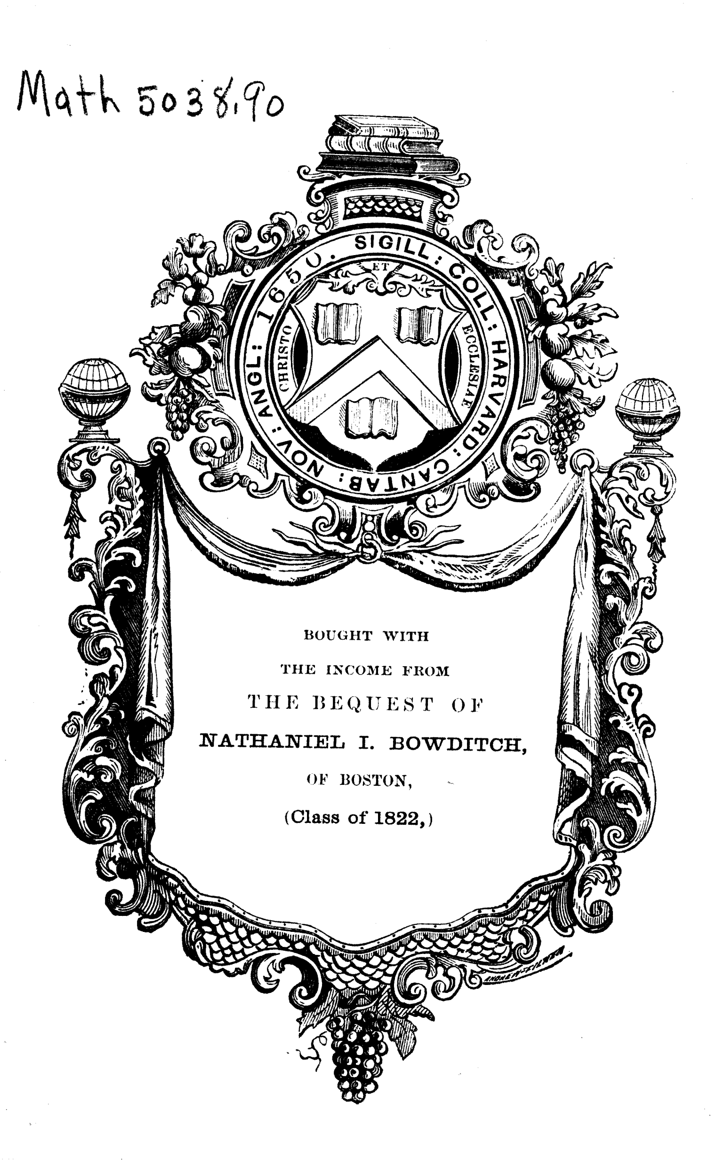


SIMON ELEMENTE DER GEOMETRIE 1890



SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5038.90







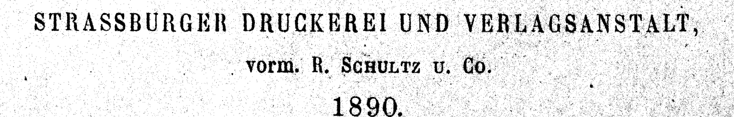
DIE ELEMENTE DER GEOMETRIE

MIT RÜCKSICHT AUF DIE ABSOLUTE GEOMETRIE

von

Dr. Max Simon,

Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg.



STRASSBURGER DRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT,

vorm. R. Schultz u. Co.

1890.







DIE

ELEMENTE DER GEOMETRIE

MIT RÜCKSICHT

AUF DIE ABSOLUTE GEOMETRIE

von

Dr. Max Simon,

Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg.

STRASSBURGER DRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT,

vorm. R. SCHULTZ U. CO.

1890.

Math 5038.90

HARVARD COLLEGE
JUL 1911
LIBRARY.

Bowditch fund

VORWORT.

Die Verhältnisse der Anstalt, an welcher ich seit 19 Jahren thätig bin, veranlassen mich, meinen Lehrgang in den Elementen der Geometrie zu veröffentlichen. Derselbe weicht von dem in vieler Hinsicht ausgezeichneten des «Mehler» erheblich ab; ich gebe für den ersten Anfang in Quarta und selbst noch in Untertertia dem Gang des «Mehler» den Vorzug, dagegen für die Repetition in Obertertia bezw. Secunda und für die Lehre von Messung und Aehnlichkeit ziehe ich den hier gegebenen bei Weitem vor. Die Ansicht, welcher ich bereits in den «Verhandlungen der Direktoren-Konferenz etc., 1877» unumwundenen Ausdruck gegeben habe, dass alle Lehrbücher für den Schüler überflüssig, halte ich noch heute aufrecht; für den Quartaner scheint mir das Lehrbuch geradezu schädlich. Was den Lehrgang selbst betrifft, so ist er eine Ausführung der Skizze, welche ich bereits 1885 einem kleinen, vertrauten Kreise von Fachgenossen gegeben habe. Er unterscheidet sich von dem des «Mehler» hauptsächlich durch die Berücksichtigung der absoluten oder nicht-euclidischen Geometrie. Ein Jahrhundert ist verflossen, seit Gauss die Folgerungen aus der Nichtannahme des Parallelenaxioms sämmtlich gezogen, und noch hat die Schule von den tiefsinnigen Betrachtungen des grössten Mathematikers sowie seiner Nachfolger Lobatschewsky, Bolyai Vater und Sohn, Riemann und Helmholtz etc. so gut wie gar keine Kenntniss genommen, obwohl die in der Lehrerwelt

ziemlich verbreiteten Elemente Balzer's die absolute Geometrie nach Gebühr berücksichtigen und Frischauf 1876 «Elemente der absoluten Geometrie» veröffentlicht hat. — Was die Anmerkungen betrifft, welche am Schluss hinzugefügt sind, und auf welche im Text durch einen Stern hingewiesen ist, so sind sie für Schüler in keiner Weise bestimmt, sondern auf den Kreis derjenigen berechnet, welche an des Verf. im gleichen Verlag 1885 erschienenen «Elementen der Arithmetik» Antheil genommen haben. Die Verlagshandlung hat daher für Schüler eine Ausgabe ohne Anmerkungen veranstaltet. Die Philosophen von Fach werden allerdings den Anmerkungen schon an der Sprache anmerken, dass sie kein Fachmann geschrieben hat; für die in Note 6 hingeworfene Hypothese sowie für den Versuch, den Unterschied zwischen «Grösse» und «Zahl» zu definiren, bitte ich von vorn herein um Nachsicht. Die Note über die absolute Geometrie ist ausführlicher gerathen, als ich anfänglich beabsichtigte, und geradezu zu einer Einführung in die Elemente der absoluten Geometrie geworden. Für die Correctur bin ich meinem Collegen Dr. Harbordt zu Dank verpflichtet.

Strassburg, den 16. Januar 1890.

Dr. Max Simon.

EINLEITUNG.

Fläche, Linie, Punkt sind Begriffe, welche aus der Anschauung der Körper hergeleitet sind*.

1. Unter den Verbindungslinien zweier Punkte A und B giebt es *eine*, welche kürzer ist als jede andere*, sie heisst: *Strecke* (AB, auch $\overline{a}$ oder a); A und B heissen ihre Endpunkte (Bleiloth, gespanntes Seil). AB ist demnach von BA nicht verschieden. Die Strecke AB heisst auch Abstand der Punkte A und B.

2. Zwei Strecken lassen sich so auf einander legen, dass sie mit einem Endpunkte zusammenfallen, und dass die andern entweder auch zusammenfallen oder die eine Strecke ein Theil der andern wird. Im ersten Falle heissen die Strecken gleich, im zweiten heisst diejenige kleiner, welche ein Theil der andern ist, die andere grösser.

3. Man sagt: Punkt C liegt auf der Verlängerung von AB über B hinaus, wenn AB ein Theil von AC ist. AB heisst dann um BC verlängert. Jede Strecke lässt sich über jeden ihrer Endpunkte um jede andere Strecke auf eine und nur eine Weise verlängern.

4. Bleibt der eine Endpunkt, z. B. A, fest, und verlängert man fortgesetzt über den andern, so erweitert sich die Strecke zum *Strahl*, $\overrightarrow{AB}$, welcher an einer Seite unbegrenzt und unendlich ist. $\overrightarrow{AB}$ ist von $\overrightarrow{BA}$ verschieden. Verlängert man fortgesetzt über beide Endpunkte, so erhält man *die Grade*, welche unbegrenzt und unendlich ist. Zur Verlängerung der Strecke benutzen wir gewöhnlich den Umstand, dass wir gradlinig sehen.

5. Zwei verschiedene Graden können höchstens einen Punkt gemeinsam haben (1 und 3), den Schnittpunkt.

6. Zwei sich schneidende Graden bestimmen **eine** Ebene* (z. B. dadurch, dass eine dritte Grade sich so bewegt, dass sie beständig jene beiden schneidet). Diese Fläche hat die Eigenschaft, dass jede Grade, welche zwei ihrer Punkte verbindet, ganz in sie hineinfällt (Axiom 1 von der Ebene). Da die Ebene durch zwei sich schneidende Grade bestimmt ist, so ist sie es auch durch drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen (Axiom 2). Zwei Ebenen, welche drei solche Punkte gemein haben, decken sich.

7. Je zwei Ebenen lassen sich so zur Deckung bringen, dass eine beliebige Grade der einen mit einer beliebigen Graden der andern zusammenfällt. Jedes Stück der Ebene ist in derselben frei verschiebbar.

8. Zwei sich schneidende Graden theilen ihre Ebene in vier Theile, **Winkel** genannt. Jeder von ihnen ist das Stück der Ebene zwischen zwei Strahlen, welche vom selben Punkt ausgehen. Der Punkt heisst Scheitel, die Strahlen heissen Schenkel des Winkels. Je zwei Strahlen, welche vom selben Punkt ausgehen, schneiden aus der Ebene zwei Winkel aus, welche zusammen die Ebene geben*.

9. Zwei Winkel heissen gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass sie sich decken*. Dabei decken sich auch Scheitel und Schenkel; umgekehrt: wenn die Schenkel sich decken, sind die Winkel entweder gleich oder ergänzen sich zur Ebene. Von zwei Winkeln heisst derjenige kleiner, welcher einem Theil des andern gleich ist.

10. Ein Winkel kann wiedererzeugt werden dadurch, dass der eine Schenkel oder Strahl sich in der Ebene um den Scheitel dreht, bis er in die Lage des andern kommt. Der Winkel dient zugleich als Mass für die Drehungsgrösse. Dreht sich der Strahl ganz herum, so erzeugt er die Ebene wieder. Jeder Punkt auf dem Strahl behält bei der Drehung seinen Abstand vom Scheitel bei und fällt bei der Bewegung der Reihe nach mit sämmtlichen Punkten zusammen, welche vom Scheitel diesen Abstand haben. Die Linie, auf welcher alle diese Punkte liegen, heisst Kreis. Sie wird durchlaufen von dem freien Endpunkte einer Strecke, welche sich um ihren festen Endpunkt dreht, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt (Zirkel). Der feste Punkt

heisst Mittelpunkt oder Centrum des Kreises, der feste Abstand Radius. Ein Theil des Kreises heisst Bogen. (Der Kreis entsteht auch, wenn sich eine wie auch immer gestaltete Linie AB um den festen Punkt A dreht, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt.)

11. Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Bogen desselben Kreises, denn da sich ihre Endpunkte nach 9 jedenfalls zur Deckung bringen lassen, sowie auch die Mittelpunkte, so müssen auch die Bogen sich decken wegen der Gleichheit der Radien. Zu ungleichen Winkeln gehören in derselben Weise ungleiche Bogen. Wegen der gegenseitigen eindeutigen Zuordnung sind diese Beziehungen umkehrbar; also gehören zu gleichen Bogen gleiche Winkel, zum grösseren Bogen der grössere Winkel.

12. Einen Winkel messen heisst angeben, welcher Bruchtheil der Winkel von seiner Ebene ist*; einen Bogen messen heisst angeben, welcher Bruchtheil der Bogen von seinem Kreise ist. Wegen der Beziehung in 11 sind beide Aufgaben identisch, das heisst der Winkel ist derselbe Bruchtheil der Ebene wie irgend ein Bogen zwischen den Schenkeln (also auch der des Transporteurs) von seinem Vollkreise. Um Brüche zu vermeiden, theilt man dabei Kreis und Ebene (und Drehung) in 360 gleiche Theile oder Grade (vermuthlich in Folge eines Irrthums der Babylonier über das Jahr), den Grad (^{0}) in 60 Minuten, die Minute ($'$) in 60 Sekunden ($''$). Man bezeichnet den Winkel zwischen den Strahlen AB und AC durch BAC oder CAB, auch wohl (AB, AC) oder kurz als Winkel A.

13. Von den vier Winkeln zweier sich schneidender Graden heissen je zwei benachbarte Nebenwinkel, je zwei gegenüberliegende Scheitelwinkel. Je zwei Nebenwinkel bilden zusammen die Halbebene. Scheitelwinkel sind einander gleich, weil ihre Bogen gleich sind, da sie denselben Nachbarbogen zum Halbkreis ergänzen und alle Halbkreise gleich sind, da sie sich durch Drehung oder Klappen zur Deckung bringen lassen.

14. Winkel, welche kleiner als ein Rechter sind, heissen spitze; welche grösser als ein Rechter, aber kleiner als eine Halbebene sind, heissen stumpfe; die Halbebene, insofern sie auch als Winkel angesehen werden kann, heisst gestreckter Winkel; Winkel, welche grösser als die Halbebene sind, heissen überstumpf.

15. Ein Winkel, dessen Scheitel im Centrum eines Kreises liegt, heisst Centriwinkel; das Stück der Kreisfläche zwischen zwei Radien heisst Sector oder Kreisausschnitt. Eine Strecke zwischen zwei Punkten auf dem Kreise heisst Sehne. Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst Durchmesser. Ein Stück der Kreisfläche zwischen Sehne und Bogen heisst Segment oder Kreisabschnitt. Zu gleichen Centriwinkeln desselben (oder gleichen) Kreises gehören gleiche Bogen, daher auch gleiche Sehnen, gleiche Kreis-Aus- und Abschnitte; ebenso auch zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel, Sehnen etc.

16. Die Kreisfläche ist ein vollständig begrenztes Gebilde in der Ebene. Die Punkte des Innern sind dem Centrum näher, die Punkte des Aeussern entfernter als die des Kreises. Der Kreis ist der Ort der Punkte, welche von seinem Mittelpunkt die Entfernung des Radius haben. Das heisst: Jeder Punkt, der auf dem Kreise liegt, hat vom Centrum die Entfernung des Radius, und jeder Punkt, welcher diese Entfernung hat, liegt auf dem Kreise.

17. Jedes vollständig begrenzte Gebilde in der Ebene heisst Figur. Sind die Grenzen einer Figur Strecken, so stimmt ihre Anzahl mit der Anzahl ihrer Endpunkte überein. Die Grenzen der Grenzstrecken heissen Ecken, die Grenzstrecken Seiten der Figur. Je nach der Anzahl der Ecken oder Seiten heisst die Figur Dreieck, Viereck u. s. w. oder Dreiseit, Vierseit u. s. w., allgemein Polygon oder Vieleck oder Vielseit. Eine Strecke, welche zwei Ecken verbindet und nicht zur Begrenzung der Figur dient, heisst Diagonale (Querlinie). Die Winkel, von deren Schenkeln zwei benachbarte Seiten abgeschnitten sind, und welche Stücke des Polygons enthalten, heissen die Winkel des Vielecks. Ihre Nebenwinkel heissen Aussenwinkel. Figuren, deren Grenzen auf einander fallen, fallen zusammen und heissen congruent; die Stücke, welche sich decken, heissen homolog oder entsprechend.

18. Das Dreieck entsteht, wenn man in einen Winkel eine Querstrecke zieht von einem Schenkel zum andern. Man bezeichnet seit Euler gewöhnlich die Ecken mit A; B; C; die Seiten abgekürzt mit den kleinen Buchstaben der gegenüberliegenden Ecken, also BC z. B. mit a; die Winkel mit dem ihrem

Scheitel entsprechenden griechischen Buchstaben α; β; γ. Man sagt gewöhnlich, das Dreieck hat drei Winkel, während es die Winkel sind, welche das Dreieck haben; das Dreieck ist kein angebbarer Bruchtheil eines seiner Winkel. Sind in einem Dreieck zwei Seiten gleich (zwei Radien und ihre Sehne), so heisst das Dreieck gleichschenklig. Ist a gleich c, so heisst B die Spitze, AC die Grundlinie oder Basis. Sind alle drei Seiten gleich (Sehne gleich Radius), so heisst das Dreieck gleichseitig.

19. Mit Benutzung des ersten geometrischen Ortes, des Kreises als Ort der Punkte bestimmten Abstands, insbesondere zur Construction des Dreiecks aus drei Seiten schliesst der erste Abschnitt; dabei bemerkt man, dass durch zwei Seiten die dritte beschränkt ist, weil sie (1) zwischen Summe und Differenz der beiden andern liegen muss.

Die sämmtlichen Paragraphen der Einleitung enthalten entweder Worterklärungen (Definitionen) oder Thatsachen der Anschauung (Axiome), soweit nicht ausdrücklich auf andere Nummern zur Begründung verwiesen, oder (wie 6) beides zugleich.

Kapitel I. Congruenz.

Die Grade als Axe und ein Paar ihrer Gegenpunkte.

1. Die überall gleichförmige Ebene wird durch jede Grade in zwei Halbebenen zerlegt. Die Halbebenen können durch Drehung um die Grade als Axe zur Deckung gebracht werden* (Umkehrbarkeit, (6) zweites Axiom von der Ebene) und zwar entweder so, dass man beide bewegt oder eine liegen lässt; dabei fällt jeder Punkt A der einen Halbebene mit einem Punkt B der andern zusammen; ein solches Paar heisst Gegenpunkte, auch wohl einfach Paar A/B. Jeder Axenpunkt X ist sein eigener Gegenpunkt, da die Axe in Ruhe bleibt, und deswegen auch AX gleich BX, das heisst: Jeder Axenpunkt ist von je zwei Gegenpunkten gleich weit entfernt. Irgend ein Punkt, der nicht auf der Axe liegt, z. B. C rechts von der Axe, ist nicht gleich weit von A und B entfernt, denn da AC die Axe in X schneidet, so geht beim Klappen die Strecke AC in die gebrochene Linie BXC über und ist als solche länger als BC. Die Axe scheidet also die Punkte, welche näher an A liegen, von denen, welche näher an B liegen. Sie ist der Ort der Punkte, welche von A und B gleich weit entfernt sind. Zu zwei Punkten kann es daher nicht mehr als eine Axe geben. Unter den Axenpunkten ist ausgezeichnet der Punkt M, in welchem die Axe AB schneidet, er ist der Mittelpunkt von AB.

2. Links und rechts von der Axe sind nicht nur die Strecken AX und BX einander gleich, sondern auch die Winkel, wie AXM und BXM, XAM und XBM, insbesondere auch AMX gleich BMX. Die Axe steht auf AB in der Mitte senkrecht.

3. Da jede Grade Axe sein kann und zu jedem Punkt A in Bezug auf jede Grade ein Gegenpunkt existirt, so ist es wahrscheinlich, dass es zu je zwei beliebigen Punkten A und B eine Axe giebt, welche mit der Senkrechten in der Mitte von

AB identisch ist. Die Existenz dieser Mittelsenkrechten beweisen wir wie folgt:

a) Strecke AB hat eine Mitte. Beweis: Nehme ich mir zwischen A und B irgendwo Punkt X und trage AX von B aus auf AB ab, bis Y, so kann entweder X mit Y zusammenfallen und ist dann die Mitte; oder ich erhalte Strecke XY, welche kleiner als AB und deren Mitte zugleich die Mitte von AB wäre. So fortfahrend muss man schliesslich zu einem X_n gelangen, welches von seinem Y_n nicht mehr unterschieden werden kann*.

b) Ganz ähnlich wird am zugehörigen Bogen, oder einfacher durch Drehung bewiesen, dass es zu jedem Winkel eine Winkelhalbirende, und damit, dass es in jedem Punkt einer Graden eine und nur eine auf ihr Senkrechte giebt.

Also: Zu je zwei Punkten A und B giebt es eine und nur eine Axe, die Mittelsenkrechte, und sie ist der Ort aller Punkte, welche von A und B gleichen Abstand haben (2. geom. Ort). Da die Axe als Grade durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, so ist die Verbindungslinie irgend zweier Punkte gleichen Abstands die Axe. Man kann auch sagen: Die Axe ist der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen.

4. Fundamentalaufgabe I: Zu einem Punkt A seinen Gegenpunkt B in Bezug auf eine gegebene Grade g als Axe zu construiren. Analysis: A und B müssen von allen Punkten auf g gleich weit entfernt sein, also auch von zwei beliebigen Punkten X und Y auf g. Ein Ort für B ist daher der Kreis um X mit dem Radius XA, ein zweiter der Kreis um Y mit YA; also muss B beiden Kreisen gemeinsam sein. Die Construction ist danach selbstverständlich. Beweis: Da B existirt, so müssen die Kreise ausser A noch einen Punkt gemeinsam haben, den Gegenpunkt B, könnten aber auch noch D, E etc. gemeinsam haben. Dann wäre g nach 3 auch die Axe zu A/D, A/E etc., was unmöglich.

5. Wir haben zugleich bewiesen: Zwei Kreise können nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben. Ferner: Schneiden sich zwei Kreise um X und Y in A, so schneiden sie sich auch

im Gegenpunkte B von A. Haben zwei Kreise einen Punkt auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte — Centrale oder Axe — gemeinsam, so haben sie nur diesen gemeinsam, berühren sich. Wenn zwei Kreise zwei Punkte gemeinsam haben, so liegt die Centrale (Einl. 19) zwischen Summe und Differenz der Radien. Berühren sich die Kreise, so muss die Centrale durch den Berührungspunkt gehen und daher gleich Summe oder Differenz der Radien sein. (Aeussere oder innere Berührung.) Liegen die Kreise ganz aus einander, so ist die Centrale grösser als die Summe der Radien; liegen die Kreise ganz in einander, so ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien.

Diese Sätze lassen sich wegen der gegenseitigen eindeutigen Zuordnung sofort umkehren. Sie gestatten u. A. die vollständige Lösung der Aufgabe: Ein Dreieck aus den drei Seiten zu construiren. Die beiden Dreiecke, welche man erhält, geben die Figur I und lassen sich also zur Deckung bringen, sind daher blosse Wiederholungen von einander.

6. Da AB auf der Axe g oder XY senkrecht steht, so enthält I zugleich die Lösung der wichtigen Aufgabe: Von einem Punkt A ausserhalb einer Graden g auf dieselbe ein Loth zu fällen. Man sieht sofort, dass es stets ein und nur ein (Fig. I) Loth giebt, und dass dies Loth die kürzeste Verbindung zwischen Punkt und Grade, weil das doppelte Loth die Strecke AB ist, während das doppelte AX die gebrochene Linie AXB giebt. Die Länge des Loths dient als Mass für die gegenseitige Lage von A zu g und heisst: Abstand.

7. Wir sind jetzt im Stande, zu jeder Figur ihre Gegenfigur zu construiren, insbesondere auch einen Winkel wie AXY zu verdoppeln, indem wir zu A seinen Gegenpunkt B construiren. Wir bemerken, dass die Winkelhalbirende zugleich die Axe ist für je zwei Punkte der Schenkel, welche vom Scheitel gleich weit entfernt sind.

8. Fundamentalaufgabe II: Zu zwei gegebenen Punkten A und B die Axe zu construiren. Analysis: Man braucht nur zwei Punkte zu construiren, welche von A und B gleich weit entfernt sind. Construction: Schlage um A und B Kreise mit gleichem Radius, der aber (5) grösser als die Hälfte von AB sein muss, verbinde die Schnittpunkte X und Y, so ist XY die

gesuchte Axe. — Bei dieser Construction ist nicht nur XY Axe von A/B, sondern auch AB Axe von X/Y. Wir sehen, alle Kreise um A und B mit gleichen Radien, welche sich überhaupt schneiden, schneiden sich auf der Axe zu A/B.

9. Da jede Grade Axe sein kann in Bezug auf den Mittelpunkt jedes Kreises, so haben wir den Satz: Ein Kreis und eine Grade können zwei Punkte, einen Punkt, keinen Punkt gemeinsam haben. Haben sie zwei Punkte gemeinsam, so ist der Radius grösser als der Abstand des Mittelpunktes, — einen Punkt, gleich dem Abstand, — keinen Punkt, kleiner als der Abstand. Schlägt man um A und B die Kreise mit gleichem Radius, indem man den Radius von P an fortwährend wachsen lässt, so werden sich die Kreise, so lange der Radius kleiner als die Hälfte von AB ist, nicht schneiden, dann sich in M, der Mitte von AB, berühren und von nun an sich auf der Axe in zwei Punkten schneiden, welche symmetrisch zu M liegen und mit wachsendem Radius immer weiter von M abrücken.

10. Die Aufgabe II enthält zugleich die Lösung der Aufgaben: Eine gegebene Strecke zu halbiren (2 Kreise); einen gegebenen Winkel zu halbiren (7). Man schlägt um den Scheitel X des gegebenen Winkels einen Kreis, welcher die Schenkel in A und B trifft, und construirt noch einen zweiten Punkt Y, der von A und B gleich weit entfernt ist, so ist XY die Halbirungslinie (3 Kreise). — In einem gegebenen Punkt M einer gegebenen Graden g ein Loth auf derselben zu errichten. Man macht M zum Mittelpunkt einer Strecke AB auf g und construirt noch einen zweiten Punkt X, der von A und B gleich weit entfernt ist (3 Kreise); so ist MX das gesuchte Loth. Man sieht, in jedem Punkte einer Graden lässt sich das Loth (mit 3 Kreisen) construiren. Senkrechte auf verschiedenen Punkten ein und derselben Graden schneiden einander nicht (6).

11. Die bisherigen Ergebnisse lassen sich auch als eine Anzahl von Dreieckssätzen aussprechen. Da ein Punktepaar A/B und ein Axenpunkt X ein gleichschenkliges Dreieck bestimmen und umgekehrt die Spitze X eines gleichschenkligen Dreiecks AXB stets ein Axenpunkt von A/B ist, so lassen sich die Eigenschaften der Axe auch als Sätze vom gleichschenk-

ligen Dreieck aussprechen. Ich hebe den wichtigsten hervor: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis gleich. Auch wohl: Gleichen Seiten desselben Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. Daher sind im gleichseitigen Dreieck die Winkel gleich.

Ist $AC > BC$, oder, was dasselbe, schneidet die Axe A/B zwischen A und C, so fällt beim Klappen α auf einen Theil von β, also: Der grösseren von zwei Seiten desselben Dreiecks liegt der grössere Winkel gegenüber. Diese Sätze lassen sich wieder wegen der gegenseitigen eindeutigen Zuordnung umkehren.

12. Die Constructionsfigur von I kann aus je zwei Dreiecken hergestellt werden, welche in den drei Seiten übereinstimmen. Also: Zwei Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen, sind congruent. Der Congruenzsatz 1 (sonst 3) gestattet, einen Winkel in der Ebene beliebig zu verlegen, z. B. den Winkel α in A an den Strahl AX anzulegen. Man schneide von Winkel α ein beliebiges Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ab, trage $\alpha\gamma$ auf AX von A aus ab bis C, schlage um A mit $\alpha\beta$ und um C mit $\gamma\beta$ Kreise, welche sich in B oder B' schneiden, so ist BAC oder $B'AC$ der verlangte Winkel.

13. Figur zu I kann auch hergestellt werden durch zwei Dreiecke, welche übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Satz: Zwei Dreiecke sind congruent etc. (gewöhnlich Congruenzsatz 1).

14. Figur zu I ist bestimmt durch die Strecke XY und die gleichen Winkelpaare AXY und BXY, sowie AYX und BYX. Wir haben den Congruenzsatz 3: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln. Mittelst des leicht zu beweisenden Specialfalls (6), wo die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel rechte sind, lässt sich auch die Congruenz erweisen in dem Falle, wo die Dreiecke übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel (sonst 2).

15. Mittelst der Lösung der Aufgabe: Einen gegebenen Winkel anzutragen, sind wir im Stande, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel so zu construiren,

dass eine der gegebenen Seiten eine gegebene Lage erhält; desgleichen aus einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln; ferner aus zwei Seiten und dem einer von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben a, c, α. c soll auf den gegebenen Strahl BX zu liegen kommen. Trage von B aus c auf der Graden ab bis A, lege in A an AB den Winkel α, freie Schenkel seien AY oder AY', schlage um B mit a den Kreis, welcher die freien Schenkel in C und D, bezw. C' und D' trifft; so sind Dreiecke ABC, ABD, ABC', ABD' die verlangten. Ist a kleiner als der Abstand des Punktes B von AY oder AY' (6), so giebt es kein Dreieck; ist a gleich dem Abstand, so berührt der Kreis; ist a grösser, so schneidet der Kreis in C und D bezw. C' und D'; ist a grösser als c, so schneidet der Kreis den Strahl AY oder AY' nur einmal, der andere Schnittpunkt fällt in die Verlängerung. Die Dreiecke ABC und ABC', sowie ABD und ABD' lassen sich decken (5). Wir erhalten den vierten Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und den einer von ihnen gegenüberliegenden Winkeln und das andere Winkelpaar nicht zusammen zwei Rechte beträgt.

Kapitel II. Der Parallelismus.

1. Das Aufgabenmaterial, welches durch die Benutzung der beiden geometrischen Orte in Einl. 16 und I, 3 zugänglich wird, verlangt die Combination der beiden Gebilde. Kreis und Kreis sind in I, 5 betrachtet, Kreis und Grade in I, 9, bleibt Grade und Grade. So liefert z. B. die Aufgabe, einen Kreis zu construiren, der durch drei gegebene Punkte A, B, C geht, als Orte für den Mittelpunkt die Axe zu A/B und die Axe zu B/C. Wir kennen bereits einen Fall, in welchem Grade sich nicht schneiden, nämlich wenn sie auf derselben Graden senkrecht stehen.

Die Frage entsteht: Giebt es auch Nichtschneidende, welche nicht auf derselben Graden senkrecht stehen? Wenn l eine solche Nichtschneidende von g wäre und ich von einem beliebigen Punkte auf l, dem Punkte A, ein Loth auf g fälle, AD, so dürfte AD kein Loth auf l sein; dann könnte ich auf AD in A das Loth p errichten, und p wäre ebenfalls eine Nichtschneidende zu g, aber auch die in Bezug auf AD zu l symmetrisch gelegene l', welche zugleich symmetrisch zu p liegt, wäre es ebenfalls, und jede Grade, welche einen Punkt innerhalb der beiden von p halbirten Scheitelwinkel zwischen l und l' mit A verbindet, wäre ebenfalls eine Nichtschneidende von g, und es müsste dann durch jeden Punkt A auf l ein ganzes Bündel Nichtschneidender geben, welche einen aus zwei Scheitelwinkeln bestehenden, von p halbirten Theil der Ebene vollständig ausfüllen würde. Die beiden Grenzlinien dieses Scheitelwinkelraumes würden dann an Stelle der Parallelen treten, und es gingen durch jeden Punkt zu jeder Graden zwei Parallelen, eine nach jeder Seite. Der Umstand, dass es uns noch nie gelungen, durch irgend einen Punkt der Ebene eine zweite Nichtschneidende zu construiren, hat die Ueberzeugung hervorgerufen, dass es eine zweite überhaupt nicht giebt. Wir geben derselben Ausdruck in dem «Parallelenaxiom» (Parax.). Durch einen Punkt ausserhalb einer Graden giebt es zu ihr nur eine Nichtschneidende (Parallele); oder auch: Zwei Grade, welche dieselbe dritte nicht schneiden (derselben dritten parallel sind), schneiden einander nicht (sind unter einander parallel [||]); oder auch: Eine Grade, welche auf einer von zwei Nichtschneidenden senkrecht steht, steht auch auf der andern senkrecht; oder auch: Zwei Grade, welche auf zwei sich schneidenden senkrecht stehen, schneiden sich ebenfalls. (Durch drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, ist stets ein Kreis möglich.)*

2. Im Unterricht wurde meist der folgende Gang eingeschlagen: Mit Hilfe des Eingangs erwähnten Satzes sind wir nicht nur im Stande, Nichtschneidende zu construiren, sondern es lassen sich zu jeder Graden durch jeden Punkt unzählig viele verschiedene Nichtschneidende **denken.** Sei g die Grade, P der Punkt, so brauche ich nur in beliebig vielen

Punkten von g: A_1, A_2, A_3 .... Lothe auf g: l_1; l_2; l_3 .... zu errichten und von A auf diese Lothe l selbst wieder die Lothe p_1; p_2; p_3 .... zu fällen, so sind dem Gedanken nach alle diese Lothe von einander verschieden. Führt man aber in der Wirklichkeit die Construction aus, so fallen, je besser man zeichnet, um so mehr die sämmtlichen p's in eine Grade zusammen, wodurch man nicht nur auf das Parax. geführt wird, sondern gleich auf das Rechteck.

*[2^a. Es lässt sich unschwer zeigen, dass, wenn irgendwo für irgend eine Grade g und irgend einen Punkt auch nur irgend zwei der Lothe zusammenfallen, dann für jeden Punkt und jede Grade dasselbe eintritt und das Parax. gelten muss. Die Voraussetzung ist also, es existire irgendwo in der Ebene ein einziges Rechteck oder ein Viereck mit vier rechten Winkeln, $ABCD$. Zunächst kann ich dies um die linke und rechte Seite AB und CD nach Belieben herumklappen, wodurch BC und AD sich auf ihren Graden verschieben und ich zwischen den Graden BC und AD unzählig viele Rechtecke erhalte; aber ich kann nicht nur verdoppeln, sondern, was entscheidend ist, halbiren. Denke ich mir die Axe uv von AD, so fällt beim Klappen um uv als Axe $\overrightarrow{BC}$ auf $\overrightarrow{AB}$ und Punkt C auf B, weil sich von V auf die Grade AB nur ein Loth fällen lässt. Die Axe uv von AD ist also auch die Axe von BC, und in jedem Rechteck sind die Gegenseiten gleich, und $ABVU$ ist ein Rechteck. Da ich dieses Rechteck ebenso wieder halbiren kann, und so fort in infinitum, so erhalte ich auf jeder noch so kleinen Strecke von AD ein Rechteck, dessen obere Seite in BC fällt; denke ich mir ein solches Rechteck auf AD verschoben, so beschreiben B und C Linien, welche mit BC auf jeder noch so kleinen angebbaren Strecke unzählig viele Punkte gemeinsam haben, d. h. sie bewegen sich auf BC. AD und BC bilden einen Streifen im Sinne des § 3, und es gelten für diesen alle die Streifen- und Rechteckssätze der §§ 3 bis 15. Insbesondere hat der Streifen zwischen AD und BC eine Axe xy, und ich kann ihn halbiren, viertheilen, in 2^n Theile theilen, wodurch ich schliesslich einen Streifen bekomme, dessen Breite

---

* Der eingeklammerte Paragraph ist für die Repetition bestimmt.

kleiner ist als jede noch so kleine angebbare Strecke; denke ich mir diesen beliebig oft parallel verschoben oder geklappt, also das Streifensystem, dessen Grundstreifen dieser Streifen ist, so folgt, dass in unendlicher Nähe jedes Punktes Parallelen, die zum System gehören, liegen, und da kein Grund vorhanden ist, der den beliebigen von seinem Nachbarn unterscheidet, so geht durch jeden Punkt der Ebene eine Parallele zu AD im gewöhnlichen Sinne, d. h., nehme ich AD als g und irgend einen Punkt als P an, so ist bewiesen, dass alle Lothe p, die ich von P auf die Lothe l von g fälle, zusammenfallen. Ist g_1 irgend eine andere Grade und P_1 irgend ein anderer Punkt, so kann ich wegen der freien Verschiebbarkeit die Configuration $g_1 P_1$ in die Configuration $g P$ gelegt denken; wodurch der Satz allgemein bewiesen ist. Daraus folgt dann sofort der Satz, dass jedes rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines Rechtecks ist. Denn, wenn ABD das rechtwinklige Dreieck mit dem Rechten bei A, so brauche ich nur in B auf AB und in D auf AD die Senkrechte zu errichten, welche sich in C schneiden, da ich die Figur in das System g bringen kann, und Winkel γ ist ebenfalls ein Rechter. Also ist in jedem Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte, in jedem Viereck vier Rechte. Nun ist zu zeigen, dass es durch jeden Punkt P nicht mehr als eine Nichtschneidende zu jeder Graden g giebt. Fälle von P das Loth PF auf g, ziehe durch P irgend eine Grade x*, welche nicht senkrecht steht auf PF. Denke ich mir von den Punkten der Linie x auf g die Lothe gefällt, so dürfen nie zwei von den Lothen gleich werden, da sonst wieder (Satz von den Wechselwinkeln; 4. Congruenzsatz) ein Rechteck entstände, also x doch senkrecht auf PF wäre. Die Abstände müssen daher von PF aus nach einer Seite immer wachsen, nach der andern immer abnehmen. Sie mögen nach links fallen; sei FF_1 irgend eine Strecke, auf der das Fallen merkbar wäre, und $F_1 P_1$ das zugehörige Loth auf g; trage ich dann FF_1 auf g nach links beständig *ab* nach F_2, F_3 .... und errichte die Lothe $F_2 P_2$, $F_3 P_3$ etc. und ziehe durch P_1, P_2 etc. die auf $P_1 F_1$ etc. Senkrechten, welche das vorgehende Loth in Q_1, Q_2 etc. schneiden, so sind $FQ_1 P_1 F_1$; $F_1 Q_2 P_2 F_2$ etc. Rechtecke, und die Dreiecke $Q_1 P_1 P$; $Q_2 P_2 P_1$ etc. sind nach dem zweiten Congruenzsatz

congruent; also müssen die Abstände sogar negativ werden, d. h. x muss g schneiden. Da es aber in P auf PF nur eine Senkrechte giebt, so giebt es auch nur eine Nichtschneidende.]

Die beiden ersten Kapitel und die Einleitung enthalten nur Sätze, welche vom Parax. unabhängig sind. Die folgenden Sätze dieses Kapitels setzen es voraus.

3. Das Stück der Ebene zwischen zwei Nichtschneidenden heisst Streifen; eine Querstrecke, welche auf einer von ihnen und somit auf beiden senkrecht steht, heisst ihr Abstand an

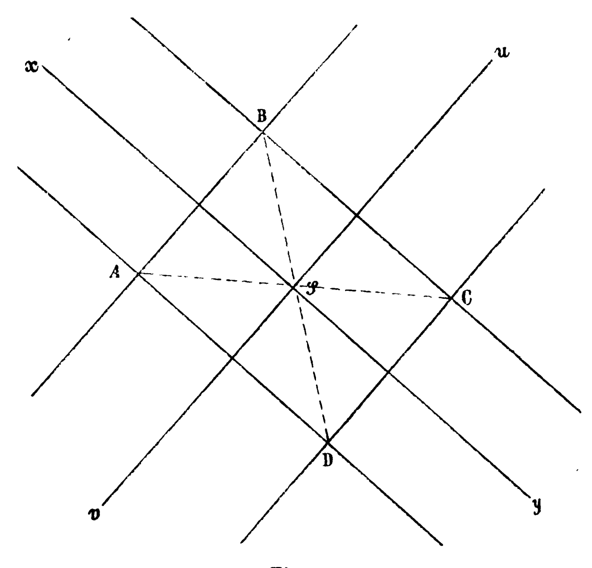


Fig. 1.

dieser Stelle. Jeder Abstand theilt den Streifen in zwei Theile, welche man durch Klappen um den Abstand zur Deckung bringen kann, folglich sind alle Abstände einander gleich; denn wenn ich (Figur 1) zwei Abstände AD und BC habe, und ich klappe um die Axe xy von AB, so fällt zugleich C auf D, daher heissen die Nichtschneidenden parallel (||), d. h. neben einander laufend (ohne sich zu nähern). Von zwei || sagt man, sie seien gleichgerichtet oder haben gleiche Richtung. Der constante Abstand heisst die Breite des Streifens.* Da je zwei Breiten wie AD und BC wiederum einen Streifen bestimmen und AB und DC zwei Abstände dieses Streifens sind, so sind

sie ebenfalls gleich, da sie durch Klappen um die Axe uv zur Deckung gebracht werden können, und es sind daher die Stücke der Parallelen zwischen je zwei Breiten einander gleich. Ein solches Stück der Ebene wie $ABCD$, welches zwei auf einander senkrechten Streifen gemeinsam ist, heisst: Rechteck.

3[a]. Ein solches Rechteck entsteht, wenn man ein Viereck mit drei rechten Winkeln construirt, da der vierte nach dem Parallelenaxiom von selbst ein Rechteck ist. Im Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten nicht nur parallel, sondern auch gleich (2). Man kann daher ein Rechteck auch construiren, indem man auf einer Graden irgendwo, z. B. in D und C, zwei gleich lange Lothe errichtet und die Endpunkte A und B verbindet; denn denkt man sich in A das Loth auf DA errichtet, so muss es nach 3 durch B gehen.

4. Das Rechteck wird durch jede Axe halbirt, durch beide zusammen geviertheilt, der ausgezeichnetste Punkt ist der Punkt S, in welchem sich die beiden Axen schneiden. Er ist von allen 4 Ecken gleich weit entfernt. Um jedes Rechteck lässt sich also ein Kreis beschreiben. Zieht man die Radien nach den Ecken, so sieht man, dass sie zu zwei und zwei einen Durchmesser geben, was sofort mit Benutzung beider Axen bewiesen werden kann. Also: Im Rechteck halbiren die Diagonalen einander und sind einander gleich. Jede Diagonale zerschneidet das Rechteck in zwei nach I, 12 oder I, 13 congruente Dreiecke mit je einem rechten Winkel, z. B. BD in die Dreiecke ABD und DBC. Dabei sind als homologe Stücke die Winkel ABD und BDC einander gleich, und die Winkel ABD und ADB ergänzen sich zu einem Rechten. Umgekehrt: Jedes rechtwinklige Dreieck ABD, rechter Winkel bei A, ist die Hälfte eines Rechtecks. Folgerung: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Winkelsumme gleich 2 Rechten *.

5. Da jedes Dreieck sich als Summe oder Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke darstellen lässt, so ist in jedem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen stumpfen Winkel haben, — stumpfwinkliges Dreieck —, nicht mehr als einen rechten

Winkel — rechtwinklig, wohl aber drei spitze — spitzwinklig. Der Aussenwinkel ist gleich der Summe der beiden innern Dreieckswinkel. Der Aussenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als jeder Basiswinkel. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. Daher sind im gleichschenkligen Dreieck durch einen Winkel alle bestimmt. Im gleichseitigen sind alle Winkel $^2/_3$ Rechte oder Winkel von 60 Grad.

6. Die Sätze vom Rechteck lassen sich auch umkehren. Eine Umkehrung ist bereits erwähnt. Sie giebt den Satz: Alle Punkte an derselben Seite einer Graden g, welche von ihr denselben Abstand d haben, liegen auf einer zu g parallelen Graden. Mit 2 zusammen giebt dieser Satz den 3. geometrischen Ort: die Parallele im Abstande d als Ort der Punkte, welche von einer Graden g den Abstand d haben und an derselben Seite von g liegen (Dreiecksconstructionen mit Zuziehung der Höhe).

7. Eine andere Umkehrung ist der Satz: Verbindet man die Endpunkte zweier Durchmesser eines Kreises, so entsteht ein Rechteck. Auch wohl: Ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbiren und gleich sind, ist ein Rechteck. Beweis: Die gleichschenkligen Dreiecke ASB und CSD einerseits und ASD und BSC andererseits haben gleiche Winkel, und folglich sind im Viereck alle vier Winkel einander gleich, also jeder ein Rechter. Dieser Satz lautet auch abgekürzt: Der Peripheriewinkel auf dem Halbkreis ist ein Rechter. Peripheriewinkel heisst ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie eines Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind. Man sagt, der Peripheriewinkel steht auf dem Bogen, welcher seine Schenkel im Innern des Winkels verbindet. (Der Name Kreiswinkel wäre vorzuziehen.) Verbunden mit dem Satz 7 giebt er den vierten geometrischen Ort. Der Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist der Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungslinie jener Punkte ist. Er gestattet: mittelst eines einzigen Kreises ein Loth zu errichten; durch einen Punkt A zu einer Graden g die Parallele zu ziehen mittelst zweier Kreise, und zwar dadurch, dass man das Loth fällt — AD —, (zwei Kreise) und in A auf AD das Loth errichtet mit Benutzung des Durch-

messers *DXB*. Ferner: ein Rechteck bezw. einen Streifen in 2^n Theile zu theilen mittelst eines Kreises; an einen Kreis von einem Punkt (ausserhalb) die (beiden) Tangenten zu ziehen etc. etc.

8. Die Sätze vom Rechteck lassen sich auch (bis auf den Satz von der Gleichheit der Diagonalen, der eine Folge davon ist, dass *A*/*B* und *C*/*D* zwei Paar Gegenpunkte derselben Axe) als Streifensätze aussprechen. Wir haben vor Allem den Satz: Im Streifen ist die Axe zu den Endpunkten einer Breite zugleich die Axe für die Endpunkte aller andern; sie halbirt den Streifen und heisst Axe des Streifens oder Mittelparallele. Zwei Streifen von gleicher Breite sind congruent. Die Mittelparallele halbirt jede Querstrecke. Beweis: Entweder dadurch, dass man die Querstrecke als Diagonale eines Rechtecks ansieht, oder dadurch, dass man vom Schnittpunkt *M* der Querstrecke *AC* mit der Axe die Breite fällt, *PMQ*, und dann zeigt, dass die Dreiecke *AMP* und *QMC* aus Gleichheit einer Seite und der anliegenden Winkel congruent sind.

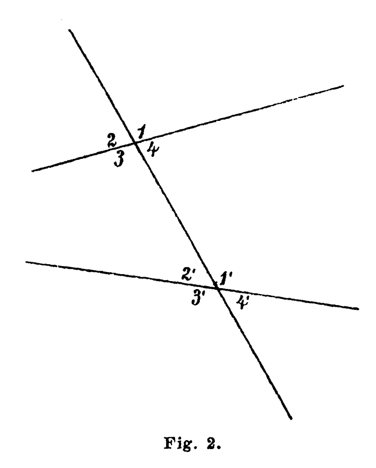


Fig. 2.

Aus der Congruenz derselben beiden Dreiecke oder auch der Hälften des Rechtecks folgt die Gleichheit der Winkel *PAC* und *QCA*. Jede Querstrecke bestimmt also wie die Breiten wechselseitig gleiche Winkel. Dieser Satz lässt sich wegen des Parax. umkehren. Setzt man die Reihenfolge der Winkel, welche eine Grade mit zwei andern bildet, fest, etwa in der Weise der nebenstehenden Figur 2, so werden die Winkel mit gleicher Nummer an den verschiedenen Schnittpunkten Gegenwinkel genannt, während 3 und 1′ wie 4 und 2′ (auch 3′ und 1, 2 und 4′) Wechselwinkel heissen; 4 und 1′, 3 und 2′ (4′ und 1, 2 und 3′) Ergänzungswinkel. Der Gegenwinkel z. B. zu 1 ist der Scheitelwinkel seines Wechselwinkels 3′, der Ergänzungswinkel der Nebenwinkel. Parallele

werden von jeder Graden unter gleichen Gegen- und Wechselwinkeln geschnitten. (Ergänzungswinkel ergänzen sich zu 2 Rechten.) Umgekehrt: Werden zwei Grade von einer dritten so geschnitten, dass ein Paar Wechsel- oder Gegenwinkel gleich sind (oder ein Paar Ergänzungswinkel 2 Rechte), so sind sie parallel. Die Gleichheit der Winkel allein reicht nicht hin, denn auch die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks werden von der Grundlinie unter gleichen Winkeln aber in entgegengesetzter Reihenfolge geschnitten. Solche Grade heissen antiparallel; für den rechten Winkel ist die Umkehrung nicht merkbar.

9. Jede Querstrecke halbirt (wie jede Breite) den Streifen, nur lassen sich die Hälften nicht durch Klappen, sondern durch Drehung und Verschiebung zur Deckung bringen; es sind daher auch je zwei parallele Querstrecken wieder einander gleich. (Gleiche Querstrecken können aber auch antiparallel sein.) Der Satz wird gewöhnlich abgekürzt in: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. Streifen, welche übereinstimmen in der Länge einer Querstrecke und den Winkeln, welche sie mit den Grenzlinien bildet, sind einander congruent.

10. Zwei parallele Querstrecken bestimmen einen zweiten Streifen; das Viereck, welches zwei Streifen gemeinsam ist, heisst Parallelogramm (Par.). In jedem Par. sind nach 9 die gegenüberliegenden Seiten gleich; ferner betragen nach 8 zwei anstossende Winkel zusammen zwei Rechte, sind daher die gegenüberliegenden Winkel gleich. Jedes Par. wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

11. Da die Diagonalen Querstrecken für beide das Par. bildende Streifen sind, so müssen ihre Mittelpunkte auf den Mittelparallelen beider Streifen (8) liegen und daher in den Schnittpunkt S dieser beiden Graden zusammenfallen. Also: In jedem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander (Mittelpunkt). Ziehe ich durch die Enden einer Diagonale, z. B. A und C irgend zwei Parallele, so liegt S auf der Axe des von ihnen gebildeten Streifens; zieht man durch die Enden B und D der andern Diagonale wieder irgend zwei Parallele, so liegt S auch auf der Mittelparallele dieses Streifens, S ist also auch der Schnittpunkt der beiden neuen Axen und

somit auch der Mittelpunkt des dem ursprünglichen Par. umgeschriebenen Par. Wir haben den Satz von der Beharrung der Mittelpunkte: Schreibt man irgend einem Par. ein anderes um oder ein, diesem wieder und so fort, so haben sämmtliche Parallelogramme denselben Mittelpunkt.

12. Die meisten Sätze in 10 und 11 lassen sich umkehren. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, ist ein Par. — 2. Lösung der Fundamentalaufgabe, durch A zu g die Parallele zu ziehen — mit zwei Kreisen. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Par., womit ein neuer Beweis für den Satz: In jedem Dreieck ist die Winkelsumme zwei Rechte, geliefert ist. Ferner: Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Par.; Halbiren in einem Viereck die Diagonalen einander, so ist das Viereck ein Par. (Beweis entweder durch Congruenzsatz oder indirekt: Seien AC und BD die Diagonalen, welche sich in S schneiden, und wären AB und DO nicht parallel, so könnte man durch D die Parallele zu AB ziehen, welche AC in C' schnitte; denkt man sich noch durch S die Parallele zu AB, so ist diese die Achse und muss AC' halbiren und zwar in S, d. h O' fällt mit O zusammen.) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Par. Beweis direct oder indirect wie beim vorigen Satz. Der Ort für die Punkte, welche in irgend einer Richtung von einer Graden einen bestimmten Abstand haben, ist eine Parallele. Hierauf beruht die für die Constructionen so wichtige Parallelverschiebung.

(Aufgabe: Eine Strecke von gegebener Länge und Richtung zwischen die Schenkel eines Winkels zu legen.)

13. Durch den Streifen ist seine Breite d. h. die kürzeste Querstrecke vollkommen bestimmt. Jede andere Querstrecke ist zweimal vorhanden, indem zwei zu irgend einer Breite symmetrisch gelegene — antiparallele — Querstrecken gleich sind. Durch die Länge einer Querstrecke ist also ihre Richtung im Allgemeinen zweideutig bestimmt. Die Länge der Querstrecke kann beliebig gross gegeben sein, aber nicht kleiner als die Breite.

14. Das Rechteck ist nur ein besonderer Fall der Parallelogramme (Par.), nämlich der, in welchem die sich durchschnei-

denden Streifen senkrecht stehen. Combinirt man zwei congruente Streifen, so entsteht ein Par., in welchem alle 4 Seiten als Querstrecken gleicher Winkel (entsprechende) in congruenten Streifen einander gleich sind. Die Diagonalen stehen als Axen zu den Endpunkten der andern auf einander senkrecht und halbiren die Winkel, durch welche sie gehen. Ein solches Par. heisst Raute oder Rhombus. In jede Raute lässt sich ein Kreis beschreiben. Auch diese Sätze lassen sich umkehren. Ein gleichseitiges (nicht überschlagenes) Viereck ist eine Raute; desgleichen ein Viereck, in welchem die Diagonalen sich halbiren und auf einander senkrecht stehen; desgleichen ein Par., in welches sich ein Kreis beschreiben lässt.

15. Combinirt man zwei Streifen, welche sowohl congruent sind als auf einander senkrecht stehen, so entsteht ein Quadrat oder regelmässiges Viereck, welches Parallelogramm, Rechteck und Raute, in welchem also alle Seiten und Winkel gleich sind, die Diagonalen gleich sind und auf einander senkrecht stehen.

16. Zwei antiparallele Querstrecken AD und BC eines Streifens bestimmen ein Viereck, welches symmetrisches Trapez, auch wohl bloss Trapez heisst. Das Trapez liegt symmetrisch in Bezug auf die Axe zu AB, welche auch zugleich die Axe von DB ist. Das Trapez erhält man auch, wenn man zwei Paar Gegenpunkte ein und derselben Axe betrachtet*; daher schneiden sich sowohl die Diagonalen AC und BD auf der Axe des Trapezes, als auch die antiparallelen Seiten. Die Diagonalen sind ebenfalls antiparallele Querstrecken und gleich. Die Streifenaxe verbindet die Mitten der beiden Querstrecken (auch die der Diagonalen), ihre Strecke im Trapez (Mittellinie) ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten. Beweis durch Parallelverschiebung der einen Querstrecke, bis sie durch die Mitte der anderen geht. Es verdient bemerkt zu werden, dass die beiden antiparallelen Querstrecken sich auch innerhalb des Streifens schneiden können; dann entsteht ein überschlagenes Trapez, in welchem Seiten und Diagonalen ihre Lagen tauschen. Die angeführten Sätze bleiben sämmtlich gültig. Das Rechteck ist ein besonderer Fall des Trapez. Das Trapez mit seinen Diagonalen ist eine äusserst reiche Quelle für Constructionsaufgaben.

17. Zwei beliebige Querstrecken geben ein Trapezoid, in welchem von den Sätzen des Trapez nur der Satz über die Mittellinie gültig bleibt.

Kapitel III. Vom Kreise.

1. Das Parallelenaxiom ist identisch mit dem Satz: Durch je drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, lässt sich ein und nur ein Kreis legen. Oder auch: Der Kreis ist durch drei seiner Punkte bestimmt (wie die Grade durch zwei). Es ist nöthig, die im Bisherigen zerstreuten Sätze zusammenzustellen und zu ergänzen. Es sind: zunächst die Definition in E. 10, wiederholt in 16, die Sätze in 11, 12 und 15. Zu 15 können wir in Folge des Congruenzsatzes I, 12 hinzufügen, dass auch zu gleichen Sehnen gleiche Centriwinkel, Bogen etc. gehören. E. 18 benutzen wir schon den Umstand, dass zwei Radien und ihre Sehnen per Def. ein gleichschenkliges Dr. bestimmen, der in Verbindung mit Kap. I, 11 den Satz giebt, welcher für Constructionsaufgaben über Sehnen der wichtigste ist. «Der Mittelpunkt des Kreises liegt senkrecht über der Mitte jeder Sehne.» Auf ihm und dem Parax. beruht die Construction des Kreises aus drei seiner Punkte.

2. Kap. I, 4. Die Fundamentalaufgabe I enthält zugleich die Aufgabe: Einen Bogen zu verdoppeln, und giebt den Satz: Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei symmetrische Hälften, der Durchmesser ist die Axe für je zwei Punkte des Kreises, welche mit seinen Endpunkten durch gleiche Bogen (Sehnen) verbunden sind. Beim Klappen um den Durchmesser fallen die ihm parallelen Sehnen beider Seiten zusammen, welche vom Durchmesser gleichen Abstand haben, da sonst eine Grade einen Kreis in mehr als zwei Punkten schneiden würde. Da sich je zwei Durchmesser durch Drehung zur Deckung bringen lassen, so haben wir den Satz: Sehnen, welche vom Mittelpunkt gleichen Abstand haben, sind einander gleich.

Die ganze Schaar der demselben Durchmesser parallelen Sehnen sammt ihren Bogen (incl. der Tangente im Endpunkte des Durchmessers) wird von dem Durchmesser gehälftet, der auf dem ersten senkrecht steht (Parallelenaxiom); er heisst: zugehörig. Je zwei parallele Sehnen bestimmen ein Trapez, denn die Sehnenschaar hat den zugehörigen Durchmesser zur Axe. Die Bogen zwischen parallelen Sehnen sind daher gleich, ebenso die Verbindungslinien über Kreuz, sowie gleichliegend etc. (Tangente von gegebener Richtung zu ziehen).

3. Die antiparallelen Seiten dieser Trapeze kehren ihre spitzen Winkel der dem Mittelpunkte näheren Sehne zu, da die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck spitze sein müssen; folglich ist die dem Mittelpunkt nähere Sehne die grössere. Wir haben den Satz: Von zwei Sehnen ist diejenige, welche dem Mittelpunkt näher liegt, die grössere*. Diese Sätze lassen sich wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung umkehren. Alle gleich langen Sehnen sind also Tangenten des mit dem gemeinsamen Abstand als Radius geschlagenen concentrischen Kreises. (Durch einen Punkt eine Sehne von gegebener Länge zu ziehen.) Dass der Durchmesser die grösste Sehne ist, kann auch direct mittelst des Satzes vom Peripheriewinkel auf dem Halbkreis nachgewiesen werden. Zur grösseren Sehne gehört der grössere Bogen.

4. Fundamentalaufgabe II löst die Aufgabe, einen Bogen zu halbiren. Zweitheilung, Viertheilung etc. des Bogens und des Kreises. Sechstheilung, Dreitheilung, Zwölftheilung etc. des Kreises. Die Aufgabe: einen beliebigen Bogen, und damit auch Winkel, in drei gleiche Theile zu theilen mittels Cirkels und Lineals, ist oft versucht, nie gelöst und unlösbar.

5. Es folgen die Kap. I, 5 und 9 enthaltenen Sätze; sie geben Veranlassung zu einer Reihe von Constructionsaufgaben, namentlich Berührungsaufgaben bei gegebenem Radius. Die Aufgabe, von einem Punkt an den Kreis die (2) Tangenten zu ziehen, erfordert den Satz vom Peripheriewinkel auf dem Halbkreis.

6. Die Sätze sub 1 lassen sich auch als Dreieckssätze aus-

---

* Der Satz lässt sich auch unabhängig vom Parax. beweisen mittelst I, 9.

sprechen: Um jedes Dreieck lässt sich ein und nur ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, — der Schnittpunkt der drei Axen zu den Endpunkten der Seiten — ist der erste von den sogenannten «merkwürdigen Punkten» im Dreieck. Der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises kann innerhalb, ausserhalb oder auf eine Seite fallen. Im letzteren Falle ist das Dreieck (II, 7) rechtwinklig, im ersteren jeder Winkel, z. B. α, wie man durch Ziehen eines Durchmessers von B oder C zeigt, ein Theil eines rechten, d. h. ein spitzer; im zweiten Fall ist der Winkel, für welchen die Verbindungslinie seines Scheitels mit M die gegenüberliegende Seite schneidet, ein stumpfer, da dann umgekehrt der rechte von ihm ein Theil ist. Diese Sätze lassen sich nach dem oft angewandten (Drobisch) Prinzip umkehren; was für das rechtwinklige Dreieck bereits direct II, 4 ausgesprochen.

7. Die Peripheriewinkel auf dem Halbkreis sind alle gleich und gleich der Hälfte ihres Centriwinkels; es ist leicht zu zeigen, dass sie gleich sind, weil sie die Hälfte des gestreckten Centriwinkels sind. Der Satz lässt sich verallgemeinern. Beweis durch Anwendung des Satzes: Der Aussenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als jeder Basiswinkel. Wir haben den Hauptsatz der Kreislehre: Die Peripheriewinkel auf demselben (oder gleichen) Bogen sind einander gleich, weil sie alle gleich der Hälfte des Centriwinkels sind, der mit ihnen auf demselben Bogen steht. (Sehnen — Tangentenwinkel.)

8. Der Bogen ist deswegen eingeführt, weil die Sehne, wenn sie nicht grade ein Durchmesser ist, den Kreis in zwei verschiedene Bogen theilt, die einander zum Vollkreis ergänzen; die zugehörigen Centriwinkel geben zusammen vier Rechte, die Peripheriewinkel zwei Rechte. Wir haben den Satz: Im Kreisviereck betragen je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte. Diese Summen sind also gleich, was man durch Ziehen der Radien direct nachweisen kann mittelst I, 11 und daraus den Satz folgern. Der Satz ist umkehrbar. Sei D der Punkt, welcher ausserhalb des durch die drei andern A, B, C bestimmten Dreiecks liegt. Lege den Kreis durch A, B, C, so kann weder BD noch CD Tangente sein, weil sonst

z. B. $BDC < 180 - \alpha$ wäre; also muss der Kreis CD ausser in C noch einmal, etwa in F schneiden. F kann nicht auf $\overrightarrow{DC}$ über C hinaus liegen, da sonst auch $> BFC = BAC$ gleich α, und α und $180 - \alpha$ Winkel des Dreiecks BDF wären; also kann der Kreis nur auf $\overrightarrow{CD}$ schneiden. Dann wären BFC und BDC beide gleich $180 - \alpha$, was unmöglich, da der eine ein Aussenwinkel vom andern ist.

9. Von einem Punkt A ausserhalb lassen sich an den Kreis M mittelst des Satzes vom Peripheriewinkel auf dem Halbkreis zwei Tangenten ziehen. AM ist die Axe für beide Kreise, den gegebenen und den Constructionskreis. Die Berührungspunkte fallen beim Klappen auf einander, da sich sonst zwei Kreise in mehr als zwei Punkten schnitten (4. Congruenzsatz). Also sind die Tangenten von A bis an den Kreis einander gleich. Die Axe AM halbirt den Winkel zwischen den Tangenten und steht als Axe auf der Berührungssehne senkrecht und halbirt dieselbe. Der Mittelpunkt hat von den Schenkeln des umgeschriebenen Winkels gleichen Abstand. Umgekehrt, wenn der Winkel gegeben und ihm ein Kreis mit gegebenem Radius eingeschrieben werden soll, muss der Mittelpunkt auf der Winkelhalbirenden liegen und von jedem Schenkel den Abstand des Radius haben. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn alle Punkte der Winkelhalbirenden und nur die Punkte dieser von den Schenkeln gleichen Abstand haben. Das erste folgt aus dem Congruenzsatz in I, 14, das andere aus dem vierten. Wir erhalten den 4. geometrischen Ort: ‚Die Winkelhalbirende als Ort für die Punkte, welche von den Schenkeln gleichen Abstand haben, oder auch als Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche die Schenkel berühren. Haben zwei Winkel mit verschiedenen Scheiteln einen Schenkel gemeinsam, so hat der Schnittpunkt ihrer Halbirungslinie von allen drei Schenkeln und somit auch von den beiden freien Schenkeln gleichen

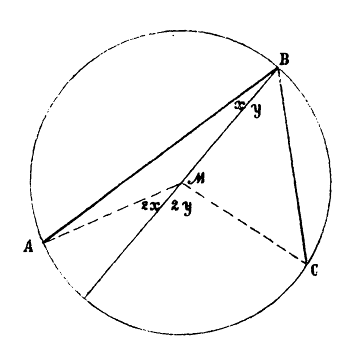


Fig. 3.

Abstand, liegt also auf der Halbirungslinie ihres Winkels. Wir haben den Satz: Die drei Winkelhalbirenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, welcher von den drei Seiten gleichen Abstand hat. Und: In jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist der zweite «merkwürdige Punkt»; sein Radius wird gewöhnlich mit ρ bezeichnet; der des umgeschriebenen r. Aus demselben Grunde wie oben schneiden sich auch die Halbirungslinien von je zwei Aussenwinkeln mit der des nicht zugehörigen Dreieckswinkels in einem Punkte, dem Mittelpunkte des der betreffenden Seite angeschriebenen Kreises ($\rho_{1, 2, 3}$).

10. Die drei Mittelpunkte der drei angeschriebenen Kreise μ_1; μ_2; μ_3 bilden ein Dreieck, für welches die Halbirungslinien der inneren Winkel $A\mu$; $B\mu$; $C\mu$ die drei Höhen sind. In unzähligen Dreiecken schneiden sich also die drei Höhen in einem Punkt (3.). Es lässt sich zeigen, dass dies für jedes Dreieck der Fall ist. Denn wenn ABC das Dreieck, D, E, F die Höhenfusspunkte, so sind die Seiten des Höhenfusspunkten-Dreiecks den Seiten a, b, c antiparallel, da z. B. $AFDC$ ein Kreisviereck. Die Seiten des Dreiecks DEF bilden folglich mit denen von ABC paarweise gleiche Winkel, und zwar die Dreieckswinkel α, β, γ. (Das letztere ist eine Folge des ersteren.) Folglich sind die Höhen des Grunddreiecks zugleich die Winkelhalbirenden des Fusspunkten-Dreiecks und schneiden sich also in einem Punkte. Es lässt sich unschwer zeigen, dass das Höhenfusspunkten-Dreieck das einzige ist, welches mit den Dreiecksseiten paarweise gleiche Winkel einschliesst, mittelst des Satzes: In ein Dreieck lassen sich nicht zwei Dreiecke einschreiben, deren Seiten alle drei einander parallel sind. Der Satz über die Höhen lässt sich schneller beweisen, wenn man durch die Ecken die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht; die Höhen sind dann die Axen zu den Endpunkten der Seiten des eingeschriebenen Dreiecks. Es lässt sich mittelst des Satzes vom Kreisviereck auch zeigen, dass der Kreis, der durch DEF geht (Feuerbach'scher Kreis, sein Mittelpunkt der 4. merkwürdige Punkt), zugleich durch die Mitten der drei Seiten geht und durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte, wodurch

sich ein eigenartiges und bildendes Aufgabengebiet eröffnet, das aber erst in Secunda völlig ausgenutzt werden kann.

11. Vom Tangentendreieck geht man zum Tangentenviereck über. Aus dem ersten Satz in 9 folgt der Satz: Im Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich. Der Satz ist umkehrbar. Die Seiten des Vierecks $ABCD$ werden bezeichnet: AB mit a, BC mit b, CD mit c, DA mit d. Der Kreis, welcher a, b, d berührt, kann nicht zugleich in C und in D berühren, da sonst AB allein schon $BC + CD$ wäre; ebenso wenig BC und AD in der Verlängerung beider über C und D hinaus, da C_1C und D_1D gleich oder $> C_1D_1$; also muss jedenfalls einer der beiden Punkte, z. B. C, ausserhalb des Kreises liegen und auf der A gegenüberliegenden Seite der Linie, welche die Berührungspunkte auf AB und AD verbindet. Zieht man von C an den Kreis die Tangente CD_1, so wäre $a + c^1 = b + d^1$, und da $a + c = b + d$, so wäre $c^1 - c = d^1 - d$, oder $CC_1 = D_1D$; dies ist unmöglich, da in jedem Dreieck die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte ist.

12. Die Sätze vom Kreise, mit Ausnahme der Sätze in 6 und 7 sind vom Parallelenaxiom unabhängig. An dieser Stelle werden am passendsten die «indirecten» Aufgaben eingeschoben (Winkeldifferenz, Parallelverschiebung), bei welchen der einschlagende Satz jedesmal erst abgeleitet wird, und welche «indirect» deswegen heissen, weil statt der eigentlichen Figur zunächst eine andere durch jene bedingte und umgekehrt sie bedingende construirt wird.

Kapitel IV. Streifensysteme.

Abschnitt 1. Satzgruppe des Pythagoras.

1. Ein Streifen und seine Axen bilden den einfachsten Fall eines «Streifensystems», d. h. eines Complexes an einander liegender congruenter Streifen (liniirtes Blatt). Ein Streifensystem — S — entsteht durch Parallelverschiebung eines Streifens nach beiden Seiten, aber auch durch Klappen eines Streifens um die

untere und obere Grenze (Kantel), auch dadurch, dass man fortgesetzt zwei der Breiten oder sonstiger paralleler (auch anti-) Querstrecken des Grundstreifens um sich selbst verlängert oder auch nur eine Querstrecke benutzt und durch die Endpunkte stets die Parallele zu den Grenzen des Grundstreifens zieht. Der Streifen ist kein angebbarer Bruchtheil der Ebene.

2. Bei der Herstellung des Systems durch zwei Querstrecken erhält man das System durchschnitten von einem Streifen. Die sämmtlichen Parallelen, welche der Querstreifen abschneidet, lassen sich durch Parallelverschiebung zur Deckung bringen (bei Breiten auch durch Klappen). Satz: Rechtecke bezw. Parallelogramme von gleichen Seiten und Winkeln sind congruent.

3. Aendert man die Richtung der parallelen Querstrecken, aber so, dass die Strecke auf den Grenzen des Grundstreifens zwischen ihnen ungeändert bleibt, so ändert sich die Fläche des auf dem Grund- oder Einheitsstreifen abgeschnittenen Par. nicht, weil sich die Par. nur durch zwei nach I, 14 congruente Dreiecke unterscheiden. Dabei bleibt aber im ganzen System die Fläche der Par. ungeändert. Satz: Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich. Da nach II, 12 jedes Dreieck die Hälfte eines Par., das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, so sind auch Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich.

4. Der Inhalt eines Dreiecks ändert sich nach 3 nicht, wenn die Spitze sich auf der Parallelen zur Grundlinie verschiebt. Da jedes Viereck durch Ziehen einer Diagonale in zwei Dreiecke links und rechts von der Diagonale zerschnitten werden kann, so lässt sich z. B. die rechts liegende Ecke parallel der Diagonale verschieben, ohne dass die Fläche des Vierecks sich ändert, bis sie in die Verlängerung einer der einschliessenden Seiten zu liegen kommt, und das Viereck verwandelt sich in ein Dreieck. Ebenso wird durch Unterbinden einer Ecke das Fünfeck in ein Viereck verwandelt, das $(n+1)$-Eck in das n-Eck. Jede gradlinig begrenzte Figur lässt sich also in ein Dreieck verwandeln, und da das Dreieck flächengleich dem Rechteck mit ganzer Grundlinie und halber Höhe oder halber Grundlinie und ganzer

Höhe des Dreiecks, auch in ein Rechteck (Verwandlungsaufgaben).

5. Die Fläche eines Dreiecks ändert sich weder bei Drehung um eine Ecke noch bei Parallelverschiebung der Spitze, also auch nicht, wenn beides zugleich geschieht: Drehe ich das Dreieck ABC, der Uebersichtlichkeit halber ein stumpfwinkliges, in der «stumpfen» Ecke A um einen Rechten und verschiebe C parallel AB, bis es AB^1 in D schneidet, und B^1, bis es AC in E^1 trifft, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ABD und AE^1C^1 flächengleich und somit auch die Rechtecke aus AB und AD einerseits und AC^1 oder AC und AE^1 andererseits flächengleich. Der Satz ist bequemer zu fassen, wenn man vom Winkel B^1AC ausgeht, und lautet: Projicirt man die Schenkel eines Winkels auf einander, so sind die Rechtecke aus je einem Schenkel und der Projection des andern auf ihn flächengleich.

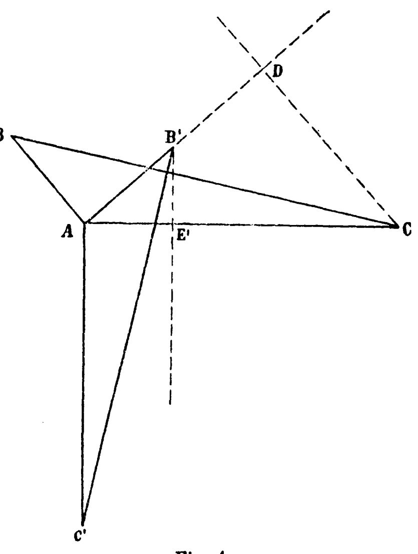


Fig. 4.

6. Setzt man den Punkt B^1 dahin, wo das von C auf $\overrightarrow{AB}^1$ gefällte Loth trifft, also in D, so wird ABD oder ABB^1 gleichschenklig, das Rechteck aus AB und AD geht in ein Quadrat über, und man hat den Satz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem zugehörigen Höhenabschnitt, den ersten Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras. Er gestattet, das Rechteck und somit jede gradlinig begrenzte Figur in ein Quadrat zu verwandeln (Quadratur). Wendet man denselben Satz auf beide Katheten zugleich an, so erhält man den gewöhnlich «Pythagoras» genannten Hauptsatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate

über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Er gestattet: Quadrate und somit alle gradlinig begrenzten Figuren zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliziren. Die Multiplication führt auf die arithmetische Aufgabe, eine Zahl durch Quadratzahlen darzustellen. Die Division verlangt die Theilung einer Strecke, nämlich der einen Seite des zu theilenden Quadrats. Die gewaltige Bedeutung des Pythagoras, welche erst in der Trigonometrie voll hervortritt, beruht darin, dass er gestattet, mit Flächen zu rechnen. Da

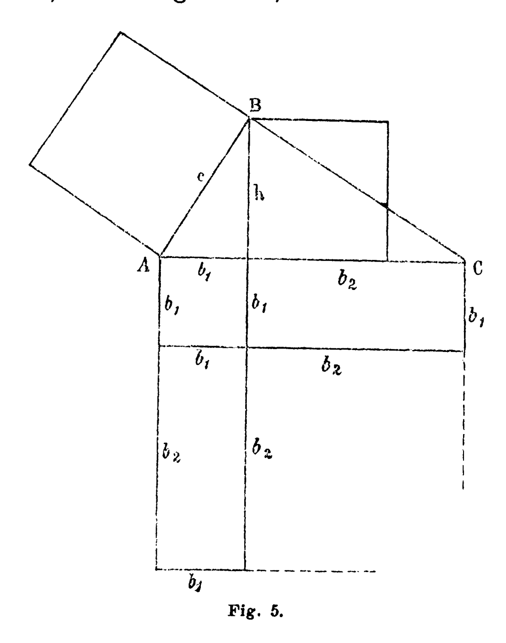


Fig. 5.

das Dreieck aus der Kathete, dem zugehörigen Höhenabschnitt und der Höhe selbst ein rechtwinkliges, dessen Hypotenuse die ursprüngliche Kathete, so zeigt der blosse Anblick der obenstehenden Figur den Satz: Das Quadrat der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Höhenabschnitten. Auf diesem Satz beruht eine zweite Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat, welche unabhängig davon ist, welche von den Seiten des Rechtecks die grössere (dafür allerdings mehr Papier beansprucht).

7. Ergänzt man in Figur 5 das Hypotenusenquadrat, so

erhält man den Satz: Das Quadrat über der Summe zweier Strecken ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck. Formel

$$(\overline{a+b})^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2\,\overline{ab}.$$

Satz von den Ergänzungs-Par. Leicht beweist man die Formeln

$$(\overline{a-b})^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{ab} \text{ und } (\overline{a+b})\,(\overline{a-b}) = \overline{a}^2 - \overline{b}^2.$$

Auf der ersten Formel beruht der indische Beweis des Pythagoras, den die Figur 6 veranschaulicht.

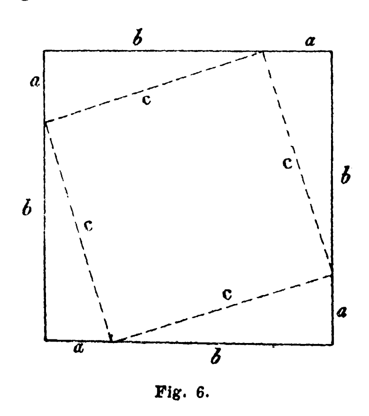


Fig. 6.

Abschnitt 2. Theilung und Messung.

1. Stellt man ein Streifensystem dadurch her, dass man nur eine Querstrecke benutzt, so erhält man den wichtigen Satz: Theilt eine Schaar von $n+1$ Parallelen irgend eine Querstrecke in n gleiche Theile, so theilt sie jede andere ebenso. Auf diesem Satz beruht die Theilungsaufgabe: «Eine gegebene Strecke AB in n gleiche Theile zu theilen.» Man zieht durch A und B beliebige aber parallele Grade, nimmt auf der ersten C an, zieht von C eine Strecke x und verlängert sie $(n-1)$mal um sich selbst bis D^1, dreht CD^1 um C, bis D^1 in die durch B gehende Parallele zu AC fällt, nach D; zieht man durch die Theilpunkte von CD die Parallele zu AC und BD, so wird AB in n gleiche Theile

getheilt. Man bemerkt sofort, dass die Construction sich wesentlich vereinfacht, wenn von selbst BD^1 parallel AC ist; dies tritt ein, wenn AC unbestimmt, d. h. C mit A zusammenfällt.

2. Die Umkehr des Satzes, welche eigentlich nichts anderes aussagt, als dass ein S auch entsteht, wenn man zwei parallele oder entsprechende Querstrecken beständig um sich selbst verlängert, lautet: Sind zwei Strecken in n gleiche Theile getheilt und von den Verbindungslinien entsprechender Theilpunkte irgend zwei parallel, so sind es alle — beruht auf dem Satz: Eine Strecke lässt sich nur auf **eine** Weise in n gleiche Theile theilen. (Trotz der doppelten Willkür der Länge x und der Richtung von AD.) Dieser Satz selbst ist eine Folge des Axioms, dass Strecken gleich sind, wenn sie sich aus gleich viel gleichen Stücken ohne Rücksicht auf die Aufeinanderfolge derselben zusammensetzen lassen. Theilungsaufgaben von Strecken und Flächen.

Da Streifen, welche in einem Paar entsprechender (od. antipar.) Querstrecken übereinstimmen, congruent sind, so wird zugleich der Einheitsstreifen in beliebig viele gleiche Theile getheilt, ebenso wie jedes von ihm abgeschnittene Rechteck oder Par. Wir sind jetzt im Stande, von jeder Strecke, jedem Streifen, Rechteck, Par. einen beliebigen Bruchtheil abzuschneiden und mittelst des Pythagoras die Bruchtheile des Rechtecks und des Par. in ein Quadrat zu verwandeln.

3. Es ist vortheilhaft, die Parallelen des S zu numeriren, in der Weise, dass man die eine Grenze des Grund- oder Einheitsstreifens mit 0, die andere mit 1, den Einheits- oder Massstreifen als Streifen Nr. 1 bezeichnet; dann die mit 1 an derselben Seite liegenden Parallelen fortlaufend mit 2, 3 etc. numerirt; die an der entgegengesetzen Seite mit 1^1, 2^1, 3^1 etc. und ebenso die entsprechenden Streifen, ebenso jede durch S durchlaufende Querstrecke. Irgend zwei Parallelen von S schliessen einen Streifen ein, der wieder zu S gehört und dem Massstreifen M congruent oder ein Vielfaches desselben ist, und zwar ist der Grundstreifen in jedem Streifen von S so oft enthalten, als es der absolute Betrag der zu seinen Grenzen gehörigen Ordnungszahlen angiebt; so ist der Streifen zwischen 5 und 9 gleich 4 M, der zwischen 7^1 und 11 gleich 18 M. Das-

selbe gilt von allen entsprechenden Querstrecken, Rechtecken, Par. Irgend eine Querstrecke irgend eines zu *S* gehörigen Streifens σ ist von der entsprechenden in *M* dasselbe Vielfache wie σ von *M*. Verschiebt man die 0-Linie nach der Seite der ungestrichenen Zahlen, z. B. nach 3, so werden alle Nummern um 3 kleiner, nach 3^1 um 3 grösser, z. B. aus 7^1 wird 4^1 etc. Jeder beliebige Streifen σ kann als Massstreifen angesehen werden; nimmt man z. B. den Streifen 0/6 als Mass, so wird die bisherige Einheit zur Theileinheit $^1/_6$. Umgekehrt kann man mittelst der Theilungsaufgabe den Einheitsstreifen als beliebiges Vielfache ansehen. Das Streifensystem ist vorzüglich geeignet, sowohl die Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen als die Bruchrechnung zu versinnlichen.

4. Durch Wiederholung von *M* (bezw. irgend einer seiner Querstrecken, Rechtecke, Par.) kann jeder Streifen von *S*, bezw. jede entsprechende Querstrecke etc. hergestellt werden, und deswegen kann der Grundstreifen bezw. seine Querstrecke etc. als gemeinschaftliches Mass für alle angesehen werden. Die Zahl, welche angiebt, wie oft das Mass im zu Messenden enthalten ist, heisst die Masszahl oder das Verhältniss des zu Messenden zum Masse ($\sigma : M$). Wählen wir statt *M* seinen *n*ten Theil zum Mass, so werden alle Masszahlen mit *n* multiplicirt. Nehmen wir statt *M* sein *n*faches, so sind nicht mehr alle Streifen in *S* (bezw. Querstreifen, Rechtecke, Par.) einfache Wiederholung der neuen Einheit, wohl aber ihres *n*ten Theils. Wird z. B. 0/6 zur Einheit, so ist 2/7 das Fünffache eines Sechstels der neuen Einheit. Nach Definition der Multiplication mit einem Bruch können wir sagen: 2/7 ist (0/6) $^5/_6$; wir erweitern den Begriff des Masses, indem wir auch Brüche als Masszahlen oder Verhältnisse zulassen, und sagen: Eine Grösse ist ein Mass für eine zweite, wenn beide ein gemeinschaftliches Mass im engeren Sinne besitzen; wir bezeichnen als Masszahl oder Verhältniss z. B. $^5/_6$, wenn der fünfte Theil der zu messenden gleich dem sechsten des Masses ist. Nach dieser Erweiterung haben wir den Satz: Je zwei Streifen in *S* (entsprechende Querstrecken, Rechtecke, Par.) können einander messen, ihr Verhältniss ist gleich dem der absoluten Beträge der Differenzen ihrer Grenzen, oder auch gleich dem ihrer Masszahlen in

Bezug auf M, ja allgemein gleich dem ihrer Masszahlen in Bezug auf irgend einen dritten Streifen von S als Mass. Aus der Definition folgt, dass, wenn $(g_1 : g) = \frac{r}{s}$ ist, $(g : g_1) = \frac{s}{r}$.

Wir können jetzt die Aufgabe lösen: Einen Streifen bezw. eine Strecke etc. in Abschnitte zu theilen, welche ein bestimmtes Verhältniss haben (innerhalb und ausserhalb; dies Verhältniss kann auch nach 8 durch Strecken gegeben werden — 4. Proportionale —). Wir haben: Irgend welche Parallelen des S theilen alle Querstrecken in Abschnitte, die zu einander im selben Verhältniss stehen (proportional).

5. Es entsteht die Frage, ob je zwei beliebige Querstrecken, Rechtecke, Par., in S ein Verhältniss haben, oder, was dasselbe, ob stets ein genauer Theil des einen gleich einem genauen Theil des anderen ist, oder auch Vielfache gleich sind, oder ob sie stets ein gemeinschaftliches Mass im engeren Sinne besitzen, d. h. ob eine Grösse derselben Art existirt, aus deren Wiederholung beide hervorgegangen sind. Die Frage reducirt sich sofort auf Querstrecken etc. des Grundstreifens, und da je zwei beliebige Strecken als Querstrecken des Grundstreifens (bezw. eines seiner Theile) angesehen werden können, so ist die Frage einfach die: Besitzen je zwei Strecken ein gemeinschaftliches Mass (im eigentlichen Sinn)? Wenn g und g_1 das gemeinschaftliche Mass m besitzen oder, wie man sich ausdrückt, commensurabel sind, so ist jeder Theil von m wieder ein solches; man kann also von keinem gemeinschaftlichen Mass behaupten, dass es das kleinste wäre, wohl aber muss unter den vorhandenen eins das grösste sein, da g und g_1 kein gemeinschaftliches Mass besitzen können, das grösser als die kleinere von ihnen (g_1) wäre. Haben g und g_1 das gemeinschaftliche Mass m, und ist $g = m \cdot r$ und $g_1 = m \cdot s$, und sind r und s theilerfremd, so ist m das grösste gemeinschaftliche Mass. Wäre nämlich $m^1 > m$ auch ein solches und $g = m^1 \cdot r^1$ und $g_1 = m^1 \cdot s^1$, so müsste (Axiom in 2) $r^1 < r$, $s^1 < s$ sein. Wir können aber beweisen, dass, wenn $g : g_1 = \frac{r}{s}$ und $g : g_1 = \frac{r^1}{s^1}$ ist, $\frac{r}{s} = \frac{r^1}{s^1}$ ist, d. h. aber $\frac{r}{s}$ wäre reducirbar.

Beweis des eben benutzten Hilfssatzes. Es ist $g = m \cdot r$; $g_1 = m \cdot s$, also $g \cdot s = g_1 r$; ebenso $g \cdot s^1 = g_1 \cdot r^1$; $(g \cdot s) r^1 = g\,(sr^1) = (g_1 r)\, r^1 = g_1\,(rr^1) = (g_1 r^1)\, r = (gs^1)\, r = g\,(s^1 r)$; also $g\,(sr^1) = g\,(s^1 r)$, also $sr^1 = s^1 r$, d. h. $\frac{r}{s} = \frac{r^1}{s^1}$, q. e. d. Der Beweis setzt nur voraus, dass auf die Grössen g sich das associative Gesetz $(a + [b + c]) = ([a + b] + c)$ anwenden lasse.

6. Zwei Strecken, welche kein grösstes gemeinschaftliches Mass besitzen, haben überhaupt keins, sind incommensurabel, und man kann daher gleich an die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses gehen. Die Strecken g_1; $2g_1$; $3g_1$ etc. bilden eine stets wachsende Reihe, und es sind daher nur zwei Fälle möglich: entweder g ist gleich $g_1 \cdot n$, in welchem Falle g_1 das Gesuchte ist; oder g liegt zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von g_1, so dass $g_1 n < g$; $g_1(n+1) > g$ ist; alsdann ist $g = g_1 \cdot n + r_1$, wo $r_1 = g - g_1 n < g_1$ ist. Alsdann ist jedes Mass von g_1 und r_1 zugleich ein Mass für g und damit für g und g_1, und umgekehrt jedes Mass von g und g_1 zugleich ein Mass für r_1 und damit für g_1 und r_1, also auch das grösste gemeinschaftliche Mass von g und g_1, das grösste von g_1 und r_1, und die Frage ist von dem Grössenpaar $g\ g_1$ auf das kleinere $g_1\ r_1$ zurückgeführt. Dies Verfahren ist dasselbe wie bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier ganzen Zahlen g und g_1, aber da alle ganzen Zahlen Wiederholungen von 1, so ist die Existenz desselben von vornherein klar, und die Kette $g\ g_1$; $g_1\ r_1$; $r_1\ r_2$ etc. hat ein Ende, da es nicht mehr als $g_1 - 1$ ganze Zahlen $< g_1$ giebt. Wenn g und g_1 continuirliche d. h. unendlich theilbare Grössen, wie Strecken etc., sind, so ist kein Grund vorhanden, dass die Reihe eine endliche sei, und es werden daher im Allgemeinen zwei solche Grössen g und g_1 kein gemeinschaftliches Mass haben oder, was dasselbe, kein Verhältniss, welches durch eine ganze oder gebrochene Zahl ausdrückbar.

7. Als Beispiel diene Seite a und Diagonale d desselben Quadrats. Zunächst ist klar, dass die Diagonale zwischen a und $a.2$ liegt. Trägt man die Seite AB des Quadrates auf der Diagonale ab von B bis F und errichtet in F das Loth auf BD,

welches AD in G schneidet, so ist AG gleich GF, weil die Dreiecke BAG und BFG congruent sind. GF gleich FD, weil GFD ein halbes Quadrat, da die Basiswinkel 45^0; das grösste gemeinschaftliche Mass für a und d ist es zugleich für GF und FD, d. h. die Aufgabe setzt zu ihrer Lösung stets ihre eigene Lösung voraus, sie ist unlösbar, a und d sind incommensurabel. Ebenso einfach lässt sich dasselbe für Seite und Höhe des gleichseitigen Dreiecks nachweisen. Siehe die letzte Anmerkung.

8. Auch bei incommensurabeln Strecken bezw. Grössen lässt sich von einem Verhältniss sprechen, da sich zu jeder Strecke g aus jeder andern g_1 und bezw. oder deren Theilen ein Strecke γ herstellen lässt, welche sich von g um jede noch so kleine vorgegebene Strecke unterscheidet, so dass wir nicht im Stande sind, einen Unterschied zwischen g und γ wahrzunehmen. Wir sehen darum g und γ als gleich an und ersetzen das Verhältniss von g :(zu) g_1 durch das von γ : (zu) g_1 und zugleich den Streifen, in welchem g Querstrecke (Quere?) ist, durch den, in welchem es γ ist, der von jenem um Unmerkliches abweicht. Wir haben dann den Satz: Je zwei Strecken haben ein bestimmtes Verhältniss, und seine Folgen: Je zwei Streifen verhalten sich wie ein Paar entsprechender Querstrecken; je zwei Rechtecke bezw. Parallelogramme mit gleichen Winkeln, welche ein Paar Seiten gleich haben, verhalten sich wie das ungleiche Seitenpaar; Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen, von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien.

9. Wir haben schon einige Sätze über das Verhältniss zweier Strecken bezw. continuirlicher Grössen bewiesen; es lässt sich zeigen, dass $g : g_1$ von einem gewöhnlichen Zahlenbruch oder Verhältniss sich nicht unterscheidet.

Satz 1: Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$, so ist $gn : g_1 n = \frac{r}{s}$. Beweis: Sei $\frac{g}{r} = m$; $\frac{g_1}{s} = m$; $gs = g_1 r$; $(g \cdot s)n = (g_1 r)n$; also $(gn)s = (g_1 n)r$; $\frac{gn}{r} = \frac{g_1 n}{s}$. (Vorausgesetzt ist das associative Gesetz und die Theilbarkeit.) Zahlenbeispiel wünschenswerth.

Satz 2: Wenn $g : g_1 = \frac{r}{s}$, so ist auch $\frac{g}{n} : \frac{g_1}{n} = \frac{r}{s}$. Denn $gs = g_1 r$; $\frac{gs}{n} = \frac{g_1 r}{n}$; $\frac{gs}{n} = \frac{g}{n} \cdot s$, weil nach dem associativen Gesetz $\left(\frac{g}{n} \cdot s\right) n = \left(\frac{g}{n} \cdot n\right) s$ ist; also $\frac{g}{n} \cdot s = \frac{g_1}{n} \cdot r$; $\frac{g}{n} : \frac{g_1}{n} = \frac{r}{s}$.

10. Hauptsatz: Das Verhältniss zweier Grössen g und g_1 ist gleich dem ihrer Masszahlen r und s, bezogen auf ein ganz willkürliches Mass M. — g bezw. $\gamma : M = \frac{p}{q}$; g_1 bezw. $\gamma_1 : M = \frac{p_1}{q_1}$. Alsdann ist $g : g_1$ bezw. $\gamma : \gamma_1 = \frac{p}{q} : \frac{p_1}{q_1} = \frac{p q_1}{p_1 q}$, da $g\ (p_1 q) = g_1\ (p q_1)$ ist. $\frac{p_1}{q_1}$ und damit g_1 oder γ_1 muss, damit dividirt werden kann, von 0 merklich verschieden sein. Wegen dieser Sätze wird statt $g : g_1$ $\frac{g}{g_1}$ geschrieben, und weiter gewöhnt man sich, die Grössen und ihre Masszahlen in Bezug auf ein beliebiges aber festes Mass mit demselben Zeichen zu bezeichnen und scheinbar mit den Grössen selbst zu rechnen. Die Gleichungen bleiben so lange richtig, als es möglich ist, auf beiden Seiten nur Verhältnisse gleichartiger Grössen wieder herzustellen, als beide Seiten «homogen» sind.

11. Jetzt ist es auch möglich, das Verhältniss zweier beliebigen Rechtecke, Par., Dreiecke festzustellen. Sei R_1 das Rechteck mit den Seiten g_1 und h_1; R_2 mit g_2 und h_2; R_3 mit g_1 und h_2, so ist $\frac{R_1}{R_3} = \frac{h_1}{h_2}$; $\frac{R_2}{R_3} = \frac{g_2}{g_1}$, also $\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \cdot \left(\frac{g_1}{g_2}\right)$. Als Flächenmass M wird im Allgemeinen das Quadrat gewählt, dessen Seite b die Längeneinheit ist. Da ist $\frac{R}{M} = \frac{h}{b} \cdot \frac{g}{b}$ oder kurz $R = hg$. In Worten: Die Masszahl des Rechtecks ist gleich dem Product aus den Masszahlen eines Paares anstossender Seiten, gewöhnlich abgekürzt: Das Rechteck ist Grundlinie mal Höhe. Dieselbe Formel und derselbe Satz gilt nach Abschnitt 1, 3 für das Par.; für das Dreieck haben wir $D = {}^1/_2\, gh$; für das Paralleltrapez $T = {}^1/_2\, h\ (a + b)$.

Abschnitt 3. Aehnlichkeit.

1. Bei der Theilungsaufgabe in ihrer abgekürzten Form tritt eine Schaar von Dreiecken auf, dadurch, dass das Dreieck im Grundstreifen (das Grunddreieck) sich durch S hindurch fortsetzt, in der Weise, dass die Schenkel des Winkels, der seinen Scheitel auf der 0-Linie hat, sich fortgesetzt vervielfältigen. Aus dem Trapezsatz II, 15 folgt sofort, dass auch die Strecke, welche die Schenkel auf 1 zwischen sich spannen, sich in derselben Weise von Par. zu Par. vervielfältigt. Je zwei Dreiecke der Schaar stimmen überein in allen Winkeln und den Verhältnissen je zweier entsprechenden Seiten. Dieselbe Vervielfältigung der Seiten wird erzielt dadurch, dass die ganz willkürliche Längeneinheit, in der man die Seiten des Grunddreiecks messen kann, verdoppelt, verdreifacht etc., sich im Verhältniss der Seiten abändert, während die Masszahlen beibehalten werden. Je zwei Dreiecke der Schaar unterscheiden sich also nur durch Abänderung des Massstabes und werden, falls der Massstab im constanten Verhältniss ihrer Seiten, dem Grundverhältniss λ, abgeändert wird, zu congruenten. (Die Dreiecke heissen ähnlich, Zeichen $\sim$.) Deshalb stehen je zwei entsprechende Längen, d. h. solche, die bei der Congruenz auf einander fallen würden, selbst im Verhältniss der Massstäbe, d. h. im Grundverhältniss. Da die Winkel von der Abänderung des Massstabes nicht berührt werden, so schliessen je zwei Paar entsprechender Längen gleiche Winkel ein. Aehnliche Dreiecke sind also solche, bei denen durch Vergleich der Stücke desselben Dreiecks sich kein Unterschied ergeben würde, sondern nur beim Uebergang von einem Dreieck zum andern (Bolzano). Man kann dies auch durch einen Satz, der in den Abschnitt 2 zwischen 9 und 10 gehörte, beweisen: Ist $\frac{g}{g_1} = \frac{a}{b}$, beide also gleich dem Zahlenbruch $\frac{r}{s}$, so ist $\frac{g}{a} = \frac{g_1}{b}$, da $\frac{g}{r} : \frac{a}{r}$ gleich $\frac{g}{a}$ und ebenso $\frac{g_1}{s} : \frac{b}{s}$ gleich $\frac{g}{b}$. Aehnliche Dreiecke stimmen also

in den Masszahlen aller entsprechenden Stücke und in den Winkeln überein; sie geben eine unerschöpfliche Fülle proportionaler Grössenreihen, wie die Colonnen des Einmaleins.

2. Da sich in das Streifensystem beliebig viele Zwischenstreifen einschalten lassen und somit auch in die Dreiecksschaar und zwar so lange, bis wir nicht mehr im Stande sind, die einzelnen Parallelen aus einander zu halten, so haben wir den allgemeinen Satz: Gleitet eine Grade parallel mit sich auf den Schenkeln eines Winkels, so entsteht eine Schaar ähnlicher Dreiecke. Da das *S* sich über den Kreuzungspunkt der beiden Querstrecken, welche bei der Theilungsaufgabe auftreten, fortsetzt, so kann man die Grade auch auf den Schenkeln des Scheitelwinkels gleiten lassen, wodurch dieselben Dreiecke wiederkehren, nur mit Vertauschung von rechts und links, oben und unten. (Innere Aehnlichkeit, welche bei unserem Sehen auftritt.) In jeder Schaar ist jeder Massstab zweimal oder, wenn man innere und äussere Aehnlichkeit trennt, nur einmal enthalten.

3. Jedes Dreieck, das einem der Schaar nach einem der vier Congruenzsätze congruent ist, ist allen anderen der Schaar ähnlich. Die Voraussetzungen ändern sich in der Weise ab, dass: 1) alle drei Seiten in den Masszahlen oder Verhältnissen übereinstimmen; 2) zwei Seiten gleiche Masszahlen haben und die eingeschlossenen Winkel gleich sind; 3) da je zwei Strecken immer ein Verhältniss haben, zwei Winkel gleich sind; 4) zwei Seiten proportionirt, die dem einen Paar gegenüber liegenden Winkel gleich, und das andere nicht zusammen zwei Rechte beträgt. Umgekehrt: Jedes Dreieck, das mit einem der Schaar eins der vier angeführten Kriterien erfüllt, ist auch einem der Schaar nach dem betreffenden Congruenzsatz congruent und somit allen ähnlich. Beweis der vier Aehnlichkeitssätze beruht darauf, dass jeder Massstab in der Schaar einmal vorkommt. Beispiel: Ist $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, so kommt in der Schaar abc d als a entsprechende Seite einmal vor als $a_1 b_1 c_1$; alsdann ist $a_1 = d$ nach Construction oder Voraussetzung, $b_1 = e$, weil beide zu b dasselbe Verhältniss haben, ebenso $c_1 = f$, also abc und def nach I, 12 congruent.

4. Auf die Aehnlichkeit gründet sich eine neue und weittragende Methode für Dreiecks-Construction. Jedes Dreieck wird als Glied seiner Schaar oder Gattung aufgefasst. Aus den drei von einander unabhängigen Angaben, welche zur Construction eines bestimmten Dreiecks erforderlich, werden, wenn es geht, zwei abgeleitet, welche der Gattung zukommen; dann wird die Gattung mittelst irgend eines zu ihr gehörenden Dreiecks construirt, welche Willkür zur Vereinfachung, wo es angeht, benutzt wird, und dann das gesuchte Dreieck durch passende Abänderung des Massstabes hervorgebracht. Damit das Dreieck construirbar, muss von irgend einer bestimmten Strecke oder Fläche in ihm die wirkliche Grösse gegeben sein. Je nachdem dies Länge oder Fläche, zerfallen die Aufgaben in zwei Klassen. Das Schema für die erste Klasse ist: Gegeben irgend zwei Angaben, welche der Gattung angehören, z. B. die Masszahlen der drei Seiten und die Länge eines bestimmten Stückes, z. B. des Umfanges. Die einfachsten Aufgaben sind diejenigen, bei denen der gesuchte Massstab sich direct berechnen lässt, z. B. $a:b:c$ wie $3:5:7$, $a+b+c=30$ cm, wo sich sofort als Massstab 2 cm und als Länge der Seiten 6, 10, 14 cm ergeben.

Dann folgen Aufgaben, bei denen sich der Massstab durch Messung verhältnissmässig leicht ergiebt: $a=13$, $b=14$, $c=15$; $\varrho=2$ cm, wo sich ϱ_1 als 4 cm ergiebt, wenn man willkürlich als Massstab den Centimeter wählt, woraus sich $x={}^1/_2$, und $a=\frac{13}{2}$, $b=7$, $c=\frac{15}{2}$ cm ergeben. Dabei tritt die Ungenauigkeit des Messens für Verhältnissbestimmung hervor. Es folgt die allgemeine Methode. Mittelst des ähnlichen Dreiecks sind die Winkel des gesuchten Dreiecks da; es fehlt nur ein Hauptstück, z. B. die Seite c; da alle entsprechenden Längen im selben Verhältniss stehen, so ist $c:c_1$ gleich der gegebenen Länge l des gegebenen Stückes zu der ihr entsprechenden l_1, und die Aufgabe ist zurückgeführt auf die Construction einer Strecke, welche zu einer gegebenen Strecke ein durch Strecken gegebenes Verhältniss hat, auf die Construction der sogenannten vierten Proportionale. Ihre Lösung ruht auf 1. Man construirt irgend ein Dreieck mit den Seiten c_1 und l_1, trägt auf l_1 vom gemeinschaftlichen Scheitel aus l ab und zieht vom Endpunkte

zur dritten Seite die Parallele, welche auf c_1 vom Schenkel aus c abschneidet. Die zweite Klasse der Aufgaben, die Flächenaufgaben, übersteigt das Pensum der Tertia. Ihre Lösung beruht auf dem Satz : Das Verhältniss entsprechender Flächen an ähnlichen Dreiecken ist constant und vom Grundverhältniss das Quadrat. Der Beweis beruht darauf, dass man alle gradlinig begrenzten Flächen in Quadrate verwandeln kann. Die Seiten dieser Quadrate sind entsprechende Längen.

5. Zieht man von einem Punkt B auf einer der Parallelen des Systems statt zwei etwa drei oder mehr Querstrecken, so entsteht ein Dreistrahl, Vierstrahl, Strahlenbündel. Da je zwei Abschnitte auf irgend welchen Parallelen des S zwischen irgend zwei bestimmten Strahlen des Bündels sich verhalten wie die Strecken, welche die betreffenden Parallelen von den beiden Strahlen von B aus abschneiden (Aehnlichkeit der Dreiecke aus Gleichheit der Winkel), diese Strecken aber ein festes Verhältniss haben — gleich dem der Abstände des Punktes B von den Parallelen —, so haben alle entsprechenden Abschnitte auf den beiden Parallelen dasselbe Verhältniss. Wir haben den 2 entsprechenden Satz: *Ein Strahlenbündel theilt alle durchgelegten Parallelen in proportionale Abschnitte.* Auf diesem Satz beruht eine neue und einfachere Lösung der Theilungsaufgahe.

6. Was den weitern Fortgang betrifft, so schliesst sich derselbe, abgesehen von der Kreisberechnung, ziemlich eng an Jacob Steiner's «Geometrische Constructionen, ausgeführt mittelst der graden Linie und eines festen Kreises» an.

Zum Schlusse will ich noch einen kurzen Ueberblick über das Pensum der Untersecunda geben. Es wird zuerst wieder der Versuch gemacht, den Begriff «Verhältniss» klarzustellen, dabei die «Reihenzahl» besprochen. Es folgt die Aehnlichkeit; Aufgaben der ersten Klasse; die Ungenauigkeit der Messung für Feststellung des Verhältnisses wird etwa in folgender Weise nachgewiesen: Sei AB eine Strecke, der Theilpunkt x bewege sich von A nach B; rückt er in die Mitte, so ist $Ax_1 : x_1B = 1$, rückt x in die Mitte von x_1B nach x_2, so ist $Ax_2 : xB = 3$, rückt x in die Mitte von x_2B nach x_3, so ist $Ax_3 : x_3B = 7$; wir bemerken, dass bald eine unmerkliche Verschiebung des

Punktes x den Werth des Verhältnisses mehr als verdoppelt. Bei der Repetition werden die Sätze durchgenommen: Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie ihre Seiten; und: die Winkelhalbirenden theilen die Gegenseite im umgekehrten Verhältnisse der anliegenden Seiten; der Kreis des Apollonius als Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein festes Verhältniss haben. Dann folgen die Aehnlichkeitsaufgaben zweiter Klasse, welche auf die Aufgabe führen, ein Quadrat zu construiren, das zu einem gegebenen Quadrat ein gegebenes Verhältniss hat. Das Verhältniss kann gegeben sein durch Zahlen (von einem Dreieck durch Parallele zur Grundlinie die Hälfte abzuschneiden), durch Strecken (ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln), durch Flächen (ein Dreieck aus den Winkeln und $a^2 + b^2 = q^2$ zu construiren). Wenn man den letzten Fall nicht auf die beiden ersten zurückführen will, so verwandelt man, falls dies nicht schon gegeben, die gegebene Fläche in ein Quadrat, construirt im ähnlichen Dreieck das entsprechende Quadrat q_1^2, hat die Gleichung $a^2 : a_1^2 = q^2 : q_1^2$, welche äquivalent mit $a : a_1 = q : q_1$ ist. Die beiden ersten sind identisch mit der Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, bezw. führen sie auf die Construction der mittleren Proportionale ($a : x = x : b$). Die Satzgruppe des Pythagoras tritt noch einmal in etwas anderer Fassung auf und findet ihren Abschluss in dem Satz: Zieht man von einem Punkt eines Kreises beliebige Sehnen und den Durchmesser, so verhalten sich die Quadrate der Sehnen wie ihre Projectionen auf den Durchmesser. Dieser Satz ersetzt das Verhältniss von Flächen durch das von Strecken. Es folgt der Uebergang auf die Potenzsätze: Das Rechteck aus den Abschnitten sich im selben Punkt schneidender Sehnen desselben Kreises ist constant. Die leichteren Fälle des Apollonischen Berührungsproblems. Im Sommer die Aehnlichkeit als Verwandtschaft mit Benutzung des Aehnlichkeitspunktes im engen Anschluss an Jacob Steiner's klassisches Werk «Geometrische Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises». Die Kreisberechnung bildet den Abschluss.

ANMERKUNGEN.

Elemente der absoluten Geometrie.

Der Begriff «Fläche» als das «zweien Körpern Gemeinsame» kann ebenso gut vom natürlichen wie vom mathematischen Körper hergeleitet werden (der sich vom natürlichen durch Abstraktion von der Undurchdringbarkeit unterscheidet), und an seiner Ausbildung hat auch der Tastsinn einen hervorragenden Antheil gehabt. Für den Begriff «Linie» als das «zweien Flächen Gemeinsame» ist das Auge vorzugsweise thätig gewesen, aber auch der Tastsinn hat durch Fühlen von Kanten mitgeholfen. Was den Begriff «Punkt» als das «zweien Linien Gemeinsame» betrifft, so will ich die Möglichkeit nicht in Abrede stellen, dass die Ortsbestimmung im Raum schliesslich bei ihm endigt. Dagegen halte ich es für unrichtig, die Fläche als Grenzvorstellung (oder Grenze im Sinne des «Elemente der Arithmetik» pag. 25 Gesagten) des Körpers bei allmählichem Schwinden der dritten Dimension zu definiren oder die Linie als Grenze der Fläche bei fortgesetzt schwindender Breite oder den Punkt als Grenze der Linie. Denn ein Körper, dessen Dimension oder Dimensionen zu schwinden beginnen, wird in jedem folgenden Zustand von dem vorigen durch die gemeinsame Begrenzung unterschieden, welche schon die Fläche ist, und ebenso für Punkt und Linie. Die gewöhnliche Erklärung, welche Bewegung zur Hilfe nimmt, hat, abgesehen davon, dass sie vom schwierigsten und letzten Begriff, dem Punkte, ausgeht, und dass sie auf Begriffe, welche der Geometrie fremd sind, die Grundbegriffe der Geometrie aufbaut, das gegen sich, dass der Punkt sich nur auf einer bereits vorhandenen Linie, ebenso die Linie, ebenso die Fläche, bewegen kann, dass also Linie, Fläche, Körper auch ganz unabhängig von der Bewegung des Punktes sind und beharren. Was den vorhin besprochenen Grenzprocess

betrifft, so führt er zum Begriff des Körper-, Flächen-, Linien-Elementes, dem Indivisibile Cavalieris und Kepplers.

Dass Körperelement und Fläche nichts mit einander gemein haben, wird den Schülern am einfachsten klar gemacht durch das Beispiel des um eine Seite rotirenden Rechtecks mit gezogener Diagonale. Das Rechteck beschreibt den Cylinder, das halbe Rechteck den Kegel, und die Körperelemente, das Prisma und die Pyramide, verhalten sich wie 1 : 3. Aehnlich beim Rotationsparaboloid. Dass wir die Linienelemente alle als gradlinig ansehen, ist eine Hypothese, gestützt auf die Anschauung, welche uns selbst ganz deutlich wahrnehmbare Curvenstücke, sobald sie von ihrer Curve getrennt sind, gradlinig erscheinen lässt. Dadurch werden aber alle Linienelemente gleich, weil es an einem Grund zur Unterscheidung fehlt. Bei dieser Gelegenheit sei es gestattet, auf die eigenthümliche Rolle, welche der Satz vom Grunde in der eben erwähnten Form bei der Ausbildung unserer Geometrie spielt, hinzuweisen. Wenn wir die Grade, die Ebene als überall gleichmässige, d. h. in sich verschiebbare Gebilde betrachten, ebenso wie Grenzkreis, Grenzkugel, Abstandslinie; wenn wir die beiden Theile der Ebene zu beiden Seiten einer Graden gleich erachten; wenn wir annehmen, dass zwei beliebige Strecken incommensurabel sind; wenn wir aus der Existenz eines Rechtecks das Parax. folgern (Kapitel II, 2[a]), so thun wir es gestützt auf den Satz vom Grunde in der Form: «Nihil est sine ratione cur potius sit quam non sit». — Ich möchte hier die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die fünf ausgezeichneten Aufsätze lenken, welche der der Wissenschaft zu früh entrissene hochbegabte Docent der Philosophie Dr. Kerry in der «Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie» unter dem Titel «Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung» veröffentlicht hat, obwohl sie sich fast ausschliesslich mit der Arithmetik beschäftigen. Diese Aufsätze gehören in ihrer Klarheit, Schärfe und Kürze mit zu dem Lehrreichsten, was es für den Lehrer der Arithmetik giebt. Die Rolle, welche der (sinnlichen)* An-

* Ich bemerke, dass ich in demselben Sinne wie Helmholtz die absolute Geometrie, z. B. den indischen Beweis des Pythagoras für vollkommen anschaulich d. h. unmittelbar einleuchtend erachte.

schauung in der Geometrie zukommt, wird unter dem zunehmenden Einfluss Schopenhauers mehr und mehr überschätzt. Wundt und Dühring weisen die «absolute Geometrie» in Widerspruch mit fast allen bedeutenden Mathematikern seit Gauss, wie Riemann, Helmholtz, Lobatschewsky, Bolyai etc. zurück, als den Gesetzen der möglichen Anschauung und Erfahrung widersprechend. Und doch sind die Begründer der absoluten Geometrie unzweifelhaft von der Anschauung ausgegangen. Weil Bolyai und Lobatschewsky unter dem Einfluss der durch den Lichtstrahl vermittelten Anschauung sich weigerten einzu«sehen», dass die Grade sich im Unendlichen schlösse, darum nahmen sie das Gegentheil an. Dann aber konnte der Kreis, der bei noch so grossem Radius immer geschlossen zu denken, schliesslich nicht in eine Grade übergehen, sondern artet in eine eigenthümliche Linie aus, den Grenzkreis, ebenso die Ebene in die Grenzkugel, und hier ist klar und deutlich der Ausgangspunkt für die absolute Geometrie. Wenn man Bolyai einen Fehler vorwerfen kann, so ist es der, dass er sich zu sehr auf die Anschauung stützt. Wie nun Wundt gar das Parallelenaxiom auf eine Stufe mit dem Identitätsprincip stellen kann, ist schwer begreiflich. Die Sache liegt doch im Grunde so: Das Rechteck ist uns — aus physiologischen Gründen — anschaulich ungemein vertraut. Die Existenz des Rechtecks hat zur Voraussetzung bezw. zur Folge das Parallelenaxiom d. h. den Satz, dass nur Grade, welche in allen ihren Punkten auf ein und derselben dritten senkrecht stehen, einander nicht schneiden; dies zwingt uns logisch zu der Annahme, dass die Grade sich im Unendlichen schliesse, um dem Widerspruch zu entgehen, dass die Schnitte zweier unendlich benachbarten Graden mit derselben dritten in unendlicher Entfernung von einander liegen. Umgekehrt, nehmen wir, wie dies zunächst unbedingt das Natürlichere ist, an, dass die Grade auch im Unendlichen sich nicht schliesst, so werden wir gezwungen, die Existenz des Rechtecks zu leugnen. Welche von den beiden Annahmen die richtige, können wir bei der asymptotischen Natur unserer Sinnlichkeit nicht entscheiden, so wenig wie der Schiffer auf dem Meere merkt, dass er statt auf einer Graden sich auf einem Kreise bewegt.

Die absolute Geometrie unterscheidet sich von der euclidischen dadurch, dass jene ein Hypothese weniger enthält als diese und sie daher als Spezialfall unter sich fasst. Es ist im Grunde traurig, dass 100 Jahre, nachdem Gauss die Resultate der absoluten Geometrie bis zu ihrer letzten Consequenz gezogen, die absolute Geometrie noch als Verirrung bezeichnet werden kann, während sie die wahre Consequenz der Methode Euclid's bildet. Ja, es ist fast nothwendig, aufmerksam zu machen, dass die geometrischen Grundbegriffe, euclidisch wie absolut, Begriffe sind und keine Anschauungen. Gewiss sind sie unter allen, welche aus der Anschauung erarbeitet sind, nebst den einfachsten Zahlen wie 1, 2, 3 diejenigen, welche die Spuren der Anschauung, «den Erdgeruch der Sinnlichkeit», um mit Kerry zu reden, am deutlichsten an sich tragen, abgesehen von der analytischen Geometrie, in welcher sie zu nackten Begriffen durchgearbeitet sind. Es ist gewiss nicht Zufall, dass der Schüler die Ebene an der Tafel und als Blatt, die Grade am Lineal oder Kantel benutzt. Gewiss begleiten unsere Vorstellungen von Strecken, Flächen etc. Anschauungen, die nicht einmal frei von Farbe sind, aber die Begriffe, welche wir in vieltausendjähriger Arbeit mit vielfältiger Benutzung des Grenzbegriffs errungen haben, sind von der Anschauung total verschieden. Welche Anschauung kann die Hankel'sche Zickzacklinie von der Diagonale des Quadrats unterscheiden, oder dem endlichen Bogen ansehen, ob seine Länge in Folge unendlich vieler unendlich kleiner Windungen unendlich, oder auch dem Hypotenusenquadrat, dass es beide Kathetenquadrate enthält, oder dem Dreieck, dass seine Winkelsumme 2 Rechte? Gerade der von Schopenhauer angefochtene euclidische Beweis des Pythagoras ist ein vorzügliches Beispiel, wie sich Anschauung und Begriffe in und zu der Geometrie verbinden. Anschaulich erkennbar ist der Satz: Der Inhalt eines Parallelogramms ändert sich nicht, wenn einer seiner beiden Streifen sich um die eine feste Seite dreht; daraus folgt logisch, dass der Inhalt eines Dreiecks sich nicht ändert, wenn die Spitze sich auf einer Parallelen zur Grundlinie bewegt; anschaulich wieder ist klar, dass Drehung um eine Ecke die Fläche eines Dreiecks nicht ändert. Die Verbindung beider Sätze in Verbindung mit der gewiss logischen Operation des

Addirens giebt den Pythagoras. Die Geometrie ist eine Verbindung von Anschauung und Logik, aber der Logik gebührt der Löwenantheil.

1. Diese Erklärung hat einen Sinn, wenn zugegeben wird, dass alle Linien sich ohne Dehnung biegen lassen, denn dann lassen sich alle Linien so auf einander legen, dass sie sich ganz oder theilweise decken. Will man die Biegung vermeiden, was entschieden vorzuziehen, nur nicht dem Schüler gegenüber, so muss man vom Linienelement als etwas Constantem ausgehen und Linien vergleichen, wie man Massen vergleicht, ohne die Anzahl der materiellen Punkte irgend einer Masse zählen zu können. Länge einer Strecke wäre dann die Summe ihrer Linienelemente, Biegung ohne Dehnung bestände darin, dass die einzelnen Linienelemente, ohne sich zu ändern, die Winkel, welche sie mit einander bilden, ändern können. (Siehe die vorletzte Note.)

4. Wird der Raum als endlich angenommen und nur im Verhältniss zu den Dimensionen unseres Körpers sehr gross, so würde sich keineswegs unsere Anschauung, wohl aber würden sich die Begriffe ändern, zunächst der der Richtung; wie der Schiffer kehrten wir im Glauben, in derselben Richtung fortzugehen, unvermerkt an den Ausgangspunkt zurück. Der Satz vom Grunde ergiebt die Gleichförmigkeit der endlichen in sich zurücklaufenden geodätischen Linie, und damit wird dieselbe zum Kreis. Der Satz vom Grunde erzwingt die Gleichheit der Radien. Unsere Anschauung, welcher der Lichtstrahl, der wegen der sich stetig ändernden Brechung eine Curve ist, völlig gradlinig erscheint, wird so wenig wie unsere Erfahrung im Stande sein, zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit des Raumes zu entscheiden.

6. Ich glaube kaum, dass es möglich ist, sich zwei schneidende Grade zugleich vorzustellen, ohne ihre Ebene mit zu sehen, so wenig wie zwei unverbundene Punkte. Der Grund, weshalb die mathematischen Elementarbegriffe Punkt, Grade, Richtung, rechter Winkel, Ebene etc. uns trotz der Unmöglichkeit einer logischen Definition so vertraut sind, dürfte wohl ein physiologischer sein und auf die Einwirkung des Lichtes und der Schwerkraft (Geo- und Heliotropismus) zurückzuführen sein.

Wenn es sich bestätigen sollte, dass das gesammte Protoplasma an der intellectuellen und psychischen Arbeit betheiligt ist, so würde es um so begreiflicher sein, dass von den Begriffen, welche dem Innersten conform sind, Jedermann ein deutliches Bewusstsein hat, ohne im Stande zu sein, einem Andern eine Erklärung davon zu geben, so wenig wie man im Stande ist, aus der Haut zu fahren. Auffallend ist jedenfalls, wie die senkrechte und horizontale Richtung, der rechte Winkel, das gleichseitige Dreieck etc. von den Schülern unbewusst bevorzugt werden. Doch sind dies Fragen, die der Physiologe zu entscheiden und zum Theil bereits entschieden hat.

7. Von den verschiedenen Erklärungen des Winkels ist diese die einzige, welche gestattet, sich den Winkel als aus gleichartigen Theilen zusammengesetzt, d. h. also als Grösse zu denken. Die Erklärung «Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Graden» hat den Fehler, dass sie von einem Unterschied spricht, ohne die Gleichheit zu definiren, und die Gleichheit kann nur mittelst des Parallelenaxioms definirt werden, bezw. müssen Linien als gleich gerichtet angesehen werden, wenn ihr Abstand unveränderlich ist; es ist auch nur schwer oder gar nicht verständlich, wie man einen Richtungsunterschied theilen kann. Richtung ist im gewöhnlichen Sinne des Wortes nichts anderes als Gradlinigkeit, und die Erklärung lautet übersetzt: «Zwei sich schneidende Grade sind zwei verschiedene Grade», wo sie dann zwar sehr richtig aber doch wenig fruchtbar ist. Die schlechteste Erklärung ist wohl, den Winkel als Drehungsgrösse zu definiren. Diese kehrt unlogischer Weise die Beziehung um; gleiche Drehungen können nur durch die Gleichheit der Winkel oder Bogen erkannt werden, aber nicht umgekehrt; sonst müsste man auch noch die Zeit zur Hilfe nehmen und sagen: Drehungen sind gleich, wenn sie bei gleichförmiger Bewegung in gleichen Zeiten ausgeführt werden, und bei der Definition der gleichförmigen Bewegung müsste man doch wieder auf die Gleichheit der Winkel oder Bogen zurückkommen. Was den Einwurf betrifft, dass die hier gegebene Erklärung dem Schüler das Unendliche zumuthet, so bemerke ich, dass es sich nur um das Unendliche im Werden handelt und der Quartaner die Schwierigkeit, dass das Unendliche im Werden ein Un-

endliches im Sein voraussetzt, durchaus nicht wahrnimmt; er geht über den Begriff des Unendlichen hinweg wie der Reiter über den Bodensee.

9. Es ist mit Absicht «heissen» statt «sind» gesagt. Vom Winkel, wie er ist, können wir im Grunde wenig oder nichts aussagen, nur von dem Winkel, wie er wird. (Siehe folgende Note.)

12. In dem Satz «Der Winkel ist derselbe Bruchtheil der Ebene wie sein Bogen vom Vollkreis» liegt ein Grenzübergang. (Von der Möglichkeit des Irrationalen wird hier abgesehen, da Winkel und Bogen unter einer Secunde vernachlässigt werden.) Eigentlich können wir nur sagen: Der sich beständig vergrössernde Kreissektor verhält sich zur Vollkreisfläche wie sein Bogen zum Vollkreise. Der Grenzübergang ist erlaubt, da es sich um das Unendliche im Werden handelt, welches allerdings nach der treffenden Bemerkung Georg Cantor's stets ein Unendliches im Sein, in dem es wird, zur Voraussetzung hat; aber diese Voraussetzung kommt kaum dem Lehrer, geschweige dem Schüler zum Bewusstsein. Wird der Winkel als fertig, als seiend angenommen, dann hört die Vergleichbarkeit und damit alle Grössenbeziehung auf, und es hat nicht den mindesten Widerspruch, anzunehmen, dass zwei Winkel, welche, solange sie im Werden beobachtet werden, sich nur um ein endliches Stück unterscheiden, wie die Gegenwinkel an Parallelen, dennoch als fertig, als seiend gedacht von einander verschieden sind um eine Winkelgrösse.

13. Bei der hier gewählten Definition des Winkels ist es unstatthaft, die Gleichheit der Scheitelwinkel durch Subtraction des gemeinschaftlichen Nebenwinkels zu beweisen. Man begeht dabei den schweren Fehler, zwei Hälften des unendlichen Ganzen als gleich im gewöhnlichen Sinne des endlich Messbaren anzusehen. Diesen Fehler begehen dieselben Leute, welche wissen, dass die Annahme Bertrand's «ein Streifen als verschwindender Bruchtheil der Ebene kann nie einen Winkel, d. h. einen angebbaren Bruchtheil der Ebene einschliessen» falsch ist. Der Satz Bolyai's und Lobatschewsky's: «Wird ein einziges Paar Paralleler unter gleichen Wechselwinkeln von einer einzigen Querstrecke geschnitten, so wird es jedes Paar

von jeder Querstrecke», kann ohne den Satz: «Scheitelwinkel sind einander gleich» bewiesen werden. Seien (La science absolue de l'espace § 13) *am* und *bn* das vorausgesetzte Paar Paralleler, *ab* die Querstrecke, *cp* und *dq* irgend ein anderes. Zunächst folgt, dass sowohl die beiden Parallelen (besser wäre Asymptoten) durch *a* zu *nb* als auch die durch *b* zu *am* zusammenfallen (Congruenz durch Drehung); daraus wieder, dass dies für alle Punkte von *am* und *bn* der Fall ist (§§ 1 und 2). Es giebt also für *bn* durch alle Punkte von *am* keine andere Parallele als *am*, und ebenso für *am*. Wir haben einen Streifen im gewöhnlichen Sinne, dieser wird von jeder Querstrecke unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, da sonst nach § 1 eine zweite Nichtschneidende auftreten würde. Nun lässt sich (§ 4) *pcdq* so auf den Streifen *am/bn* legen, dass *cp* mit *am* und *cd* in irgend einer Querstrecke zusammenfällt etc. Ja man könnte umgekehrt mit Hilfe des Parallelenaxioms den Satz «Scheitelwinkel sind gleich» beweisen, und das wäre keineswegs unnatürlich, denn die euclidische Geometrie deckt sich vollständig mit dem naiven Standpunkt, der die Gesetze des Endlichen ohne Weiteres auf das Unendliche überträgt. Wenn man mit den Halbebenen wie mit gewöhnlichen endlichen Grössen rechnet, wozu man in keiner Weise berechtigt ist, da sich Theile desselben Unendlichen denken lassen, welche unter sich und mit dem Unendlichen, dessen Theile sie sind, gleich sind, kann man mit genau demselben Recht oder Unrecht das Parallelenaxiom und den Satz über die Winkelsummen im Dreieck beweisen. Denn sind alle Halbebenen im gewöhnlichen Sinne der Massgeometrie gleich, so muss das Stück der Ebene zwischen zwei Nichtschneidenden gleich 0 sein, also können nicht zwei Nichtschneidende derselben Dritten einen Winkel einschliessen; oder auch: es würden dann an den verschiedenen Seiten dieser Dritten ungleiche Halbebenen liegen. Daher giebt es auf der Kugel oder im endlichen Raume auch keine Nichtschneidende (Hauptkreise). Ebenso wäre im Dreieck $\alpha + (\beta$ — Dreieck) + Scheitelwinkel $\gamma =$ Halbebene, also $\alpha + \beta + \gamma = 180$. Ich bemerke hierbei, dass auch der von Frischauf «Elemente der absoluten Geometrie» angeführte Beweis Flye St.-Marie's falsch ist.

Man könnte das Parallelenaxiom gradezu ersetzen durch das Axiom: «Die Gesetze des Endlichen gelten für das Unendliche», und in dieser Fassung würde wohl der Unterschied zwischen dem Parallelenaxiom und den Gesetzen unseres Denkens greifbar genug hervortreten. Sonderbar bleibt es, dass Dinge, die vom Unendlichen in der Arithmetik längst jedem Mathematiker vertraut sind, in der Geometrie so schwer berücksichtigt werden.

Kapitel I, 1. Die Umkehrbarkeit der Ebene, identisch mit der Anschauung, dass die Ebene ohne Krümmung, kann mittelst der beiden Axiome von der Ebene, sowohl in euclidischer wie in nicht-euclidischer Geometrie bewiesen werden. Bringen wir A mit C zur Deckung, so decken sich zunächst alle durch A gehenden, die Axe schneidenden Graden mit den durch C gehenden; die eine Nichtschneidende der euclidischen Geometrie fällt als Senkrechte in A auf AC mit der durch C gehenden als Senkrechten in C auf CA zusammen. In absoluter Geometrie fällt die Asymptote durch A nach links mit der durch O gehenden linken zusammen, weil es nach einer Seite nur eine Asymptote oder Parallele giebt; ebenso die rechte; also fällt auch der ganze Scheitelwinkelraum der Nichtschneidenden links und rechts zusammen. Bei dieser Gelegenheit will ich noch auf eine Ungenauigkeit im Appendix Johann Bolyai's aufmerksam machen, welche zu Fehlern Veranlassung geben kann. Die Grenzfläche F ist nicht umkehrbar wie die Ebene, und die Geometrie auf der Fläche F unterscheidet sich von der Planimetrie dadurch, dass die Congruenz durch Klappen nicht gilt und zwischen Congruenz und Symmetrie unterschieden werden muss. Dass auf F die Basiswechsel im gleichschenkligen L Dreieck gleich sind, folgt in derselben Weise wie für das sphärische Dreieck. Ebenso darf man die Ebene nicht als wirkliche Beltrami'sche Fläche oder Fläche constanter negativer Krümmung auffassen, wozu man durch die populären Vorträge von Helmholtz leicht verleitet wird, denn dann würde die Ebene nicht mehr durch drei Punkte eindeutig bestimmt sein, sie liesse sich auch nicht umkehren; sondern die Geometrie der Ebene wird uns nur in sehr vollkommener Weise versinnlicht durch die Pseudosphäre, wie dies hinsichtlich sehr vieler Kugel-

sätze, z. B. fast aller, die sich aufs Dreieck beziehen (Schneiden der drei Höhen in einem Punkte etc.), durch die Ebene und umgekehrt für die Ebene durch die Kugel möglich ist.

3ª. Der Beweis kann auch mit Hilfe der Bewegung geführt werden, indem man Punkt X sich von A nach C bewegen lässt, oder dadurch, dass man die Strecke AC ohne Dehnung biegt, bis A auf C fällt. Was überhaupt das Beweisen einer solchen «offenbaren» Thatsache betrifft, so bin ich der Ansicht, dass diese Gelegenheit eine der besten ist, die Schüler mit der Eigenthümlichkeit wirklich mathematischen Denkens vertraut zu machen.

8. Das durchgehende Prinzip, die Existenz des Construirten sicher zu stellen, zwingt durchaus dazu, die Sätze über die Gemeinschaftlichkeit zweier Kreise vor die zweite Fundamentalaufgabe zu stellen. Die von Lobatschewsky und Bolyai gegebene Definition der Graden als Complex der Schnittpunkte zweier Gegenkreise ist eine wirklich genetische und liesse sich für den Schulunterricht wohl brauchbar machen.

15. Der gewöhnlich als «erster» Congruenzsatz gezählte würde sich auch hier an Einl. 18 anschliessen lassen, nur wäre man ohne den dritten in seiner Anwendung auf den Scheitelwinkel beschränkt; es verdient bemerkt zu werden, dass auch der Zusatz zum zweiten Congruenzsatz ein Satz der absoluten Geometrie ist.

Kapitel II, 1. Dass das Parallelenaxiom mit dem Satz: «Durch drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, ist stets ein Kreis möglich», identisch ist, ist unmittelbar einleuchtend, und das eine um nichts anschaulicher als das andere. Wirklich anschaulich ist die Legendre'sche Hypothese: «Durch jeden Punkt im Innern eines Winkels lässt sich eine Grade ziehen, welche beide Schenkel schneidet»; und das, wie es scheint, lange noch nicht genug gewürdigte Buch von Balzer gründet die Parallelentheorie auf diese Hypothese. Ich sehe übrigens keinen Grund ein, warum man die schönen und einfachen Sätze Bolyais und Lobatschewsky's: «In keinem Dreieck kann die Winkelsumme grösser als zwei Rechte sein», und «Ist in einem Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte, so ist sie es in allen», sowie den schon in der Note zu E. 13 erwähnten über die Parallelen den Schülern

bei der Repetition in den oberen Klassen vorenthält. Was den Lehrgang betrifft, so könnte man, wie ich dies selbst schon gethan, mit zwei Paar Gegenpunkten zu einer Axe fortfahren, was allerdings eine etwas äusserliche Anknüpfung ist; es würden dann die Sätze über das Trapez zuerst kommen.

2ª. Dieselbe Methode gestattet, die Anfangsgründe der absoluten Geometrie, soweit sie ohne Trigonometrie zugänglich, so einfach abzuleiten, dass es im Interesse der Sache scheint, dieselben hier folgen zu lassen. Vielleicht ist es mir möglich, sie später fortzuführen.

Axiom. Die unendlich fernen Elemente eines Strahles lassen sich als ein einziger unendlich ferner Punkt «∞» betrachten, der sich von den Punkten im Endlichen nur dadurch unterscheidet, dass er unzugänglich ist.

Zwei Strahlen, welche ihre ∞ gemein haben, heissen parallel oder asymptotisch.

Folgerungen: 1. Durch jeden Punkt A giebt es zu jedem Strahl s eine und nur eine Asymptote. 2. Da von jedem Punkt auf jeder Graden zwei Strahlen ausgehen, so giebt es durch jeden Punkt A zur Graden s stets genau zwei Parallelstrahlen. 3. Zwei Strahlen, welche demselben dritten parallel sind, sind es unter einander.

Satz 1: Bilden die beiden Parallelstrahlen durch irgend einen Punkt zu irgend einer Graden selbst wieder eine Grade, so giebt es durch jeden Punkt zu jeder Graden nur eine parallele Grade. Beweis Note 13 und Text Kap. II, 2ª.

II. 2ª. Folgerung: Bilden die beiden Parallelstrahlen durch irgend einen Punkt zu irgend einer Graden nicht ein und dieselbe Grade, so giebt es durch jeden Punkt zu jeder Graden zwei parallele Graden oder Asymptoten.

In diesem Falle (S), der als allgemeiner den vorigen unter sich begreift, wird der Scheitelwinkelraum zwischen den beiden Asymptoten, welcher der Graden nicht zu- und nicht abgekehrt ist, von einem Bündel «Nichtschneidende» ausgefüllt. Die Asymptoten liegen symmetrisch zu dem vom Punkt auf die Grade gefällten Loth und der im Punkt auf dem Loth errichteten Senkrechten, der Haupt-Nichtschneidenden. Kap. II, 1.

Satz 2: Im Falle S: Die Abstände der Punkte eines Parallel-

strahls vom andern nehmen nach dem gemeinschaftlichen ∞ hin fortwährend ab.

Seien $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ parallel. BA und CD senkrecht AD. Wäre $AB = CD$, und denkt man sich die Axe MN zu $A|D$, so liessen sich die Vierecke $AMNB$ und $NMCD$ zur Deckung bringen; also steht NM auf beiden Strahlen senkrecht; die beiden Asymptoten durch N zu AD bilden eine Grade. Indem wir aus dem Satz vom Grunde (bezw. aus der Anschauung) die Stetigkeit entnehmen, folgt daraus, dass die Lothe nach der Seite der gemeinschaftlichen ∞ (C) fortgesetzt fallen; dabei muss sich die Abnahme der Abstände fortgesetzt verlangsamen (cfr. Abschnitt 2).

Satz 3: Im Falle S können nicht drei Punkte einer Graden von einer andern gleichen Abstand haben. Es würden dann drei Axen existiren, welche auf beiden Graden zugleich senkrecht ständen; wir hätten gleich drei Rechtecke und somit die euclidische Geometrie.

Errichtet man auf den Punkten einer Graden gleich lange Lothe nach derselben Seite, so ist in S der Ort ihrer Endpunkte eine Curve, Abstandslinie, welche in Folge ihrer Entstehung in sich verschiebbar (gleichförmig) wie die grade Linie. Da das Linienelement gradlinig, so steht die Tangente an die Abstandsslinie auf dem Constructionsloth senkrecht — (Parallelkreis).

Satz 4: Zwei Nichtschneidende haben einen kürzesten Abstand, der auf beiden zugleich senkrecht steht; von ihm aus nehmen die Abstände der Punkte der einen von denen der anderen nach beiden Seiten symmetrisch zu. Seien xy und uv Nichtschneidende; AB und CD zwei Lothe von B und C in uv auf xy gefällt. Dann ist entweder $AB = CD$ oder $AB < CD$, oder $AB > CD$. Ist $AB = CD$, so steht die Axe zu AD, MN auf xy und uv zugleich senkrecht, und je zwei zu ihr symmetrisch gelegene Abstände sind einander gleich. Dann müssen die Abstände von B und C aus nach N fortwährend fallen oder zunehmen, im letzteren Falle würden die Abstände jenseits A und C fortwährend fallen, und die Linien xy und uv zwei Punkte, sei es im Endlichen oder im Unendlichen, gemeinsam haben. — Ist $AB > CD$, so fallen die Abstände entweder fort-

gesetzt von B bis EF zwischen BA und CD, und steigen dann wieder — dann tritt EF an Stelle von MN; — oder sie fallen bis C und steigen dann wieder — dann tritt CD an Stelle von NM; — oder sie fallen noch über C hinaus — dann muss ein Minimum existiren, weil sonst die Graden sich im Endlichen oder Unendlichen schneiden würden.

Satz 5: In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden anderen Winkel grösser als ein Rechter. Sei ABC das Dreieck, rechter Winkel bei C. Wäre $\alpha + \beta > 90$, so wäre $\alpha > XBA(\alpha_1)$, wenn $XB \perp BC$ nach A hin. Trage ich α an $\overrightarrow{BA}$ in B als Wechselwinkel, so fällt der freie Schenkel NB ausserhalb α_1. Die Senkrechte durch die Mitte M von AB auf AC steht auch auf NB senkrecht in N. NM wäre $> BC$, weil XM schon $> BC$ ist. Dies ist, wie eben bewiesen, unmöglich.

Folgerungen: 1. In keinem Dreieck ist die Winkelsumme grösser als zwei Rechte, sowohl in euclidischer wie nichteuclidischer Geometrie. 2. Ist in einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten, so ist sie es auch in einem (bezw. in zwei) rechtw. Dreieck, und dann entsteht durch Aneinanderlegen das Rechteck; wir haben die euclidische Geometrie, d. h. in jedem Dreieck ist die Winkelsumme zwei Rechte. 3. In S ist in jedem rechtw. Dreieck und damit in jedem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte; in jedem Viereck kleiner als vier Rechte. Der Satz kann ganz wie in gewöhnlicher Geometrie durch Ziehen der Parallelen durch die Spitze zur Grundlinie bewiesen werden. 4. Wenn in einem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte, so ist sie es in jedem. 5. Der Aussenwinkel in S ist grösser als die beiden innern zusammengenommen etc.

Bezeichnen wir in S den Winkel, welchen der Parallelstrahl BC in B mit dem Loth BA bildet als «Parallelwinkel», so gilt der Satz: Der Parallelwinkel wird nach der Seite der gemeinschaftlichen ∞ hin fortwährend grösser. Wäre der Winkel bei C gleich dem bei B, so wäre in dem Viereck $ABCD$ die Winkelsumme gleich vier Rechten; wäre der Parallelwinkel bei $C >$ als der bei B, so wäre dieselbe Summe $>$ vier Rechte, gegen Satz 5. Derselbe Satz lässt sich ganz unabhängig vom Satz über die Winkelsumme im Dreieck

so beweisen: Sei g eine Grade und errichte ich auf ihr die auf einander folgenden Lothe l_1; l_2; l_3 etc., und ziehe ich durch irgend einen Punkt A vor l_1 die Parallele p_1 zu l_1, so ist p_1 eine Nichtschneidende für alle folgenden Lothe l_2 etc., wodurch der Satz, dass der Parallelwinkel mit zunehmendem Abstand kleiner wird, vollkommen bewiesen ist.

Folgerungen: 1. Zu jedem Abstand gehört ein bestimmter Parallelwinkel (da es sonst durch einen Punkt zu einem Strahl zwei Parallelstrahlen gäbe). 2. Zu jedem Winkel zwischen 0 und 90 gehört ein Abstand. 3. Je zwei Streifen sind congruent (Streifen wieder die Bezeichnung der Stücke der Ebene zwischen zwei Asymptoten d. h. Graden, welche ihr eines ∞ gemeinsam, das andere getrennt haben). Hierin liegt wieder ein wesentlicher Unterschied zwischen euclidischer und absoluter Geometrie.

Abschnitt 2. Grenzkreis und Abstandslinie.

Da die Grade im Unendlichen nicht geschlossen, so kann der Kreis mit unendlich grossem Radius nicht in eine Grade übergehen, sondern geht in ein Gebilde über, welches «Grenzkreis» heisst. Ein Stück eines Grenzkreises heisst Grenzbogen; die Radien des Grenzkreises Grenzradien. Man erhält den Grenzkreis dadurch, dass man von M aus die Radien fortwährend wachsen lässt, als Curve im Unendlichen; oder dadurch, dass man M auf einem bestimmten Radius MA sich fortwährend von A entfernen lässt; oder dadurch, dass man M auf der Axe zweier Kreispunkte A und B sich fortgesetzt bewegen lässt. Aus dem Entstehungsprocess folgt: 1. Die Tangente in einem Punkt des Grenzkreises steht auf dem Grenzradius im Berührungspunkt senkrecht. 2. Die Tangenten in den Endpunkten einer Grenzsehne AB bilden mit der Sehne gleiche Winkel und schneiden sich event. auf der Axe zu A/B etc. 3. Eine Grenzsehne und die zugehörigen Radien bilden ein gleichschenkliges Dreieck, das seine Spitze im Unendlichen hat; die Axe zu den Endpunkten einer Sehne halbirt Grenz-Sektor, -Sehne, -Segment und -Bogen; die Sehne bildet mit

den Radien in ihren Endpunkten gleiche Winkel. Dieser Umstand gestattet, den Grenzkreis zu konstruiren, wenn von ihm ein Radius und ein Punkt gegeben sind. Geht der gegebene Radius nicht selbst durch A, so muss man durch A den Parallelstrahl ziehen und dann auf jedem anderen Parallelstrahl den Punkt B so bestimmen, dass AB mit beiden Strahlen gleiche Winkel bildet, B der A entsprechende Punkt wird. Dass es auf jedem Parallelstrahl einen und nur einen Punkt B giebt, der einem gegebenen Punkt A auf einem gegebenen Strahl entspricht, lässt sich durch die Sätze Kapitel I, 9 leicht nachweisen. 4. Drei Punkte eines Grenzkreises liegen nie in grader Linie. 5. Durch drei Punkte A, B, C, welche auf ein und demselben Grenzkreis liegen, lässt sich kein Kreis legen. 6. Der Grenzkreis ist wie Kreis, Grade, Abstandslinie in sich verschiebbar, d. h. überall gleichförmig. Der Grenzkreis kann auch durch zwei seiner Punkte A und B gegeben werden, doch muss dann das ∞ der Axe A/B, welches Centrum werden soll, mitgegeben werden; durch zwei Punkte A und B giebt es also zwei Grenzkreise, welche ihre Krümmung nach entgegengesetzten Seiten wenden und symmetrisch zu AB liegen. 7. Zu gleichen Sehnen eines Grenzkreises gehören gleiche Bogen, da die Axen sich mit den Sehnen zugleich decken; zu gleichen Strecken als Sehnen gehören gleiche Grenzbogen, zur grösseren Sehne gehört der grössere Grenzbogen. Alle Grenzkreise lassen sich zur Deckung bringen.

Bewege ich A auf seinem Radius nach A_1 und B um die gleiche Strecke nach B_1, so sind, weil A_1 und B_1 Gegenpunkte für die Axe A/B sind, A_1 und B_1 die Endpunkte des concentrischen Grenzbogens, welcher, weil $A_1 B_1 < AB$, nach Satz 7 kleiner AB ist. Das Verhältniss zweier concentrischer Grenzbogen ist nur von der Entfernung ihrer entsprechenden Endpunkte abhängig, da zu gleichen Bogen des einen, wegen der Symmetrie in Bezug auf dieselbe Axe, auch gleiche Bogen des concentrischen gehören. Die Strecke k, für welche das Verhältniss zweier concentrischer Grenzbogen gleich e bezw. $\frac{1}{e}$ ist, bildet das Längenmass.

Der Streifen zwischen zwei Grenzradien wird von der Axe

zu den Grenzsehnen halbirt, die Axe ist aber selbst wieder ein Grenzradius; hier hat man also einen Streifen, der die Hälfte eines andern ist, dem er gleich ist; ebenso kann ich $^1/_4$, $^1/_8$ und mit Hülfe der Conformität des Grenzbogens beliebige Bruchtheile eines Streifens bilden, die dem Ganzen, von dem sie Theile sind, gleich sind. —

Die Eigenschaften der Graden der euclidischen Geometrie vertheilen sich in der absoluten Geometrie auf die Grade als kürzeste (geodätische) Linie; auf den Grenzkreis und auf die Abstandslinie. Es ist zu erwarten, dass die auf die Fläche des Dreiecks bezüglichen Sätze durch die Abstandslinie erhalten werden.

0. Zieht man zur selben Graden g im gleichen Abstand d oben und unten zwei Abstandslinien, so sind dieselben symmetrisch und sollen symmetrische oder entsprechende Abstandslinien heissen, die Grade g ihre Axe. Das System zweier entsprechenden Abstandslinien zeigt vollkommene Analogie mit dem Streifen der euclidischen Geometrie; es mag Abstandsstreifen heissen. Jeder Punkt im Innern hat von der Axe einen kleinern Abstand als d, jeder Punkt im Aeussern einen grössern Abstand als d, auf den Grenzen sind die Abstände d; und nach dem Umkehrungsprincipe sind diese Sätze umkehrbar.

1. Satz: Jede Querstrecke wird durch die Axe halbirt; wird bewiesen durch Fällen der Abstände auf die Axe; Congruenz nach dem Zusatz zum zweiten Congruenzsatz.

2. Satz: Jede Querstrecke schneidet die Grenzen des Abstandsstreifens unter gleichen Wechselwinkeln. (Es kann die Figur 1 benutzt werden, dabei sind BC und AD als Bogen der Abstandslinie zu denken, welche ihre hohle Seite g zuwenden.) Sei AC die Querstrecke, welche die Axe in S schneidet. Fällt man die Lothe AF und CG auf die Axe, so sind FAS und SCG einander gleich. Da nun die Tangenten an die Abstandslinien auf den zugehörigen Abständen senkrecht stehn, und Gleiches von Gleichem Gleiches giebt, so sind die Winkel BCA und CAD einander gleich.

3. Zieht man durch einen Punkt S der Axe zwei Querstrecken ASC und BSD (A und D auf dem unteren, B und C auf dem oberen Bogen) und verbindet A mit B, C mit D, so

entsteht ein Viereck $ABCD$, in welchem AB und CD Strecken, BC und AD Bogen der Abstandslinie sind. Dies Viereck, in welchem sich die Diagonalen nach Construction halbiren, zeigt, da die gradlinigen Dreiecke ABS und CSD nach dem ersten Congruenzsatz congruent sind und die Bogendreiecke BCG und ADS auch congruent sind, wie durch Drehung bewiesen wird, fast alle Eigenschaften des Parallelogramms (Gleichheit der Gegenseiten, Gleichheit der Wechselwinkel, Gleichheit der gegenüber liegenden Winkel; je zwei benachbarte Winkel betragen zu-

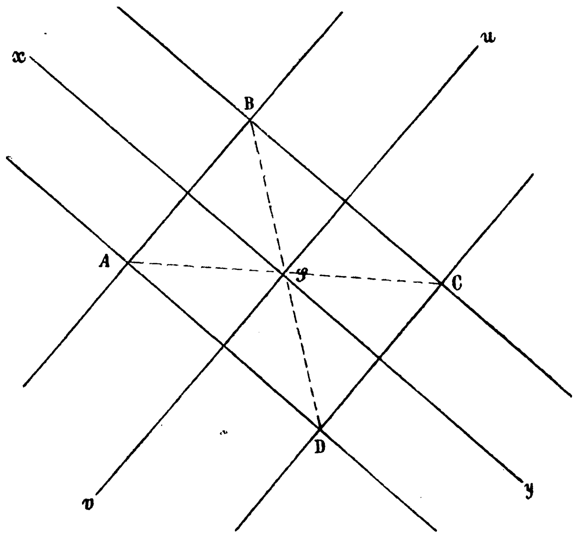


Fig. 1.

sammen 2 Rechte, da, wenn man die Abstände BE und AF fällt, die Winkel FAB und ABE gleich und die Curve auf ihrem Abstand senkrecht steht). Ein solches Viereck mag Abstandsviereck heissen. Aus der Bemerkung am Schlusse von 0 folgt, dass umgekehrt ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen halbiren, ein Abstandsviereck ist; sind die Diagonalen auch noch einander gleich so stehen AB und CD auf den Bogen senkrecht, und wir haben ein R e c h t e c k (Peripheriewinkel auf dem Halbkreis). Zieht man in einem Kreis zwei senkrechte Durchmesser, so entsteht ein regelmässiges Viereck. Die Gegenseiten eines Abstandsvierecks schneiden einander nie; die

Sehnen BC und AD könnten sich nur auf der Axe schneiden, sind aber, weil 2 Punkte gleichen Abstand haben, Nichtschneidende der Axe. Da jede Linie, welche durch S geht, von den Gegenseiten (bezw. Bogen) wechselseitig gleiche Stücke abschneidet, so geht die Linie, welche die Mitte der Sehnen BC und AD verbindet, auch durch S, und auch AB und CD liegen auf entsprechenden Abstandslinien, und die Bogen AB und CD bilden mit den Sehnen BC und AD ein Abstandsviereck. Wir haben den Satz: Symmetrische Abstandsbogen zwischen symmetrischen Abstandsbogen sind einander gleich. Ein aus den Bogen AB und CD, BC und AD gebildetes Viereck könnte man ein Abstandsparallelogramm nennen, auch in ihm sind u. a. Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich.

4. Die gemischtlinigen Dreiecke ABC und ACD sind flächengleich, ebenso die gradlinigen Dreiecke ABD und ACD. Fällt man von A, B, D die gleichen Abstände AF, BE, DF, so ist Winkel ABD gleich $EAB + FDB$; also da die Tangenten an die Abstandslinie in A und D auf den zugehörigen Abständen senkrecht stehen, so ist im gemischtlinigen Dreieck ABD die Winkelsumme gleich zwei Rechten. Die flächengleichen gradlinigen Dreiecke ABD und ACD, deren Winkelsumme also kleiner als zwei Rechte sein muss (zweiter Beweis für den Satz), haben gleiche Winkelsumme. Nennt man Strecken wie AB und CD entsprechende Querstrecken und berücksichtigt, dass, weil die Abstandslinie ihrer Entstehung nach in sich verschiebbar ist, Sehnen gleicher Bogen derselben oder entsprechender Abstandslinien einander gleich sind, so hat man den Satz: Winkel, deren Schenkel paarweise entsprechende Querstrecken sind, sind einander gleich. Verschiebt sich die Spitze B des Dreiecks ABD auf der Abstandslinie BC, und vervollständigt man die Dreiecke zu Abstandsvierecken, so sind die Bogen BC und B_1C_1, also auch BB_1 und CC_1 und somit auch die Sehnen BB_1 und CC_1 einander gleich; die Abstandsvierecke $ABCD$ und AB_1C_1D sind flächengleich, und die Dreiecke ABC und AB_1D sind es auch und haben gleiche Winkelsummen. Wir haben den Satz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher

Höhe des zugehörigen Abstandsstreifens sind flächengleich und haben gleiche Winkelsummen.

5. Verbindet man einen Punkt X im Innern des Streifens mit A und D, so ist die Fläche des Dreiecks XAD kleiner als die des Dreiecks ABD. Die Winkelsumme ist kleiner, weil AXD als Aussenwinkel grösser als die Summe der ihm gegenüberliegenden innern Winkel. Verbindet man einen Punkt Y im Aeussern mit A und D, so ist die Fläche von AYD grösser als die von ABD, weil AY die Grenze in B^1 schneidet, die Winkelsumme von AYD dagegen kleiner. Diese Sätze sind nach dem oft angewandten (Drobisch) Princip umkehrbar. Also z. B. haben zwei Dreiecke über derselben Grundlinie gleiche Fläche, so haben sie gleiche Abstandshöhe und gleiche Winkelsumme; haben sie gleiche Winkelsumme, so haben sie gleiche Abstandshöhe und gleiche Fläche.

6. Ein Dreieck lässt sich stets in ein anderes mit gleicher Winkelsumme verwandeln, welches eine gegebene Grundlinie hat. Sei ABD das Dreieck, ADE die gegebene Grundlinie. Verbinde die Mitten von BD und ED, und construire zu dieser Axe durch BD die Abstandslinie (symmetrisch zu BE), trifft AB in F, verbinde F mit E, so ist AFE das gesuchte Dreieck. Die Dreiecke ABD und AFE haben gleiche Winkelsummen, denn:
$S(ABD) = S(AFD) + S(FBD) - 180$; $S(AFE) = S(AFD) + S(FDG) - 180$; da $S(FBD) = S(FED)$, so ist $S(ABD) = S(AFE)$.

Verbindet man 5 mit 6, so folgt der Satz: Dreiecke von gleicher Winkelsumme haben gleiche Fläche.

Sowie der Zusatz: Von zwei Dreiecken hat dasjenige die kleinere Fläche, welches die grössere Winkelsumme hat, und umgekehrt. Da man mit Benutzung des Parallelabstandes, der zum Parallelwinkel von 45^0 gehört, ein Dreieck construiren kann, dessen Winkelsumme 0, d. h. dessen Seiten alle einander parallel, so giebt es ein absolut grösstes Dreieck.

7. Nach der Verwandlung kommt die Theilung. Es macht verhältnissmässig wenig Schwierigkeit, ein Dreieck ABC von der Spitze B aus in zwei gleiche Theile zu theilen. Man verwandelt ABC durch Ziehen der symmetrischen Abstandslinie durch B und der Symmetrie-Axe DB^1 von $A|C$ in das gleich-

schenklige Dreieck AB^1C, von dem AB^1D die Hälfte; construirt die symmetrische Abstandslinie durch B^1 zu AD, trifft AB in E, construirt durch E die symmetrische Abstandslinie zu BD, trifft AD in X, zieht BX, so ist ABC durch BX halbirt.

Was die Winkelsummen von ABX und BCX betrifft, so sind dieselben gleich und stehen zu der von ABC — σ — in einer sehr einfachen Beziehung. Es ist $2\sigma_1 - 180$, da AXB und BXC Nebenwinkel, gleich σ; also $\sigma_1 = 90 + {}^1/_2\sigma$; $180 - \sigma_1 = {}^1/_2\,(180 - \sigma)$. Bezeichnet man die Differenz zwischen 180 und der Winkelsumme eines Dreiecks als ebenen Excess, so haben wir $e_1 = {}^1/_2 e$; die Dreiecke verhalten sich wie ihre Excesse. Denkt man sich das Dreieck statt in zwei Theile in n gleiche Theile getheilt, so ist $n\sigma_1 = n\,180 - (180 - \sigma)$; $n\,(180 - \sigma_1) = 180 - \sigma$; $ne_1 = e$, also gilt der Satz, wenn man irrationale Zahlen durch die ihnen äquivalenten Brüche ersetzt, allgemein: Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie ihre ebenen Excesse. Damit ist auch bewiesen, dass das Maximaldreieck eine endliche Fläche hat, nennt man dieselbe $180\,\lambda^2$, so ist der Inhalt J eines beliebigen Dreiecks mit dem Excess e gleich $\lambda^2 e$. Man sieht, dass schon die Dreitheilung eines Dreiecks die Dreitheilung des Winkels erfordert.

8. Die Aufgabe, an eine gegebene Abstandslinie von einem gegebenen Punkt aus die Tangente zu ziehen, ist identisch mit der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Graden die Haupt-Nichtschneidende in gegebenem Abstand zu ziehen, und wird gelöst wie folgt: Sei g die Grade, P der Punkt, d der Abstand; fälle von P auf g das Loth PA, ziehe durch P zur Axe g die Abstandslinie, trage auf PA von A aus d ab bis B, errichte in B auf AB die Senkrechte, welche die Abstandslinie in C schneidet, fälle von C auf g das Loth CD; trage auf CD von D aus d ab bis E, verbinde P mit E, so ist PE die gesuchte Linie.

9. Der Satz vom Peripheriewinkel auf dem Halbkreis zeigt, dass es durch zwei Punkte A und B unzählig viele Abstandslinien giebt, auf deren sämmtlichen Axen die Axe zu A/B senkrecht steht. Man sieht, dass drei Punkte A, B, C derselben

Abstandslinie nie auf ein und demselben Kreise liegen können, da die Axen A/B und B/C auf der Curvenaxe senkrecht stehen, also Nichtschneidende sind. In der absoluten Geometrie haben also nicht blos nie drei Punkte einer Graden von derselben Graden gleichen Abstand, sondern auch nie drei Punkte eines Kreises. Aus der Entstehung des Grenzkreises folgt, dass durch A, B, C dann eine Abstandslinie möglich ist, wenn C entweder ein Punkt des gemeinschaftlichen Innern oder des gemeinschaftlichen Aeussern der zwei durch A und B gehenden Grenzkreise ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Construction der Abstandslinien identisch mit der Aufgabe, zu den beiden Axen von A/B und B/C die gemeinschaftliche Senkrechte zu ziehen.

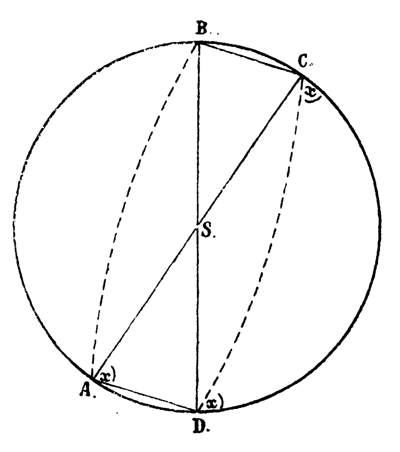


Fig. I.

Aus der nebenstehenden Figur I, in welcher AB und CD Bogen der Abstandslinie sind, sieht man, dass Kreis und Abstandslinie in beiden Schnittpunkten sich unter gleichen Winkeln schneiden wie Durchmesser und Seite des zugehörigen Abstandsvierecks (Pseudo-Rechtecks), und daraus folgt, dass, wenn der Abstand unendlich gross, die Abstandslinie in den Grenzkreis übergeht.

Legt man in den Ecken des Pseudo-Rechtecks die Tangenten an den Kreis, so entsteht, wie in der gewöhnlichen Geometrie, ein gleichseitiges Viereck, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbiren und auf einander senkrecht stehen.

Die Parallele.

Wenn sich eine grade Linie einer andern nähert, so fallen ihre Abstände von der andern fortgesetzt langsamer. Figur II. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Graden g, so dass AB gleich BC, und werde die sich nähernde

Grade g_1 von den drei in A, B, C auf g errichteten Lothen in D, E und F geschnitten. Man klappe um die Axe BE, so dass F_1 Gegenpunkt von F und D_1 Gegenpunkt von D ist; alsdann ist EX kleiner als EU (für die Figur DD_1, FF_1 gelten die Axentrapezsätze) und also EX kleiner als die Hälfte von UX, somit erst recht kleiner als die Hälfte von DF_1, also $DA + FC$ — da FC und F_1A grösser als XB und DF_1 grösser als $2EX$ — grösser als $2EB$, oder $DA - EB > EB - FC$, q. e. d.

Man sieht, dass auch $DE > EF$ ist, und dass das Parax. auch durch die Gleichheit von DE und EF ersetzt werden könnte.

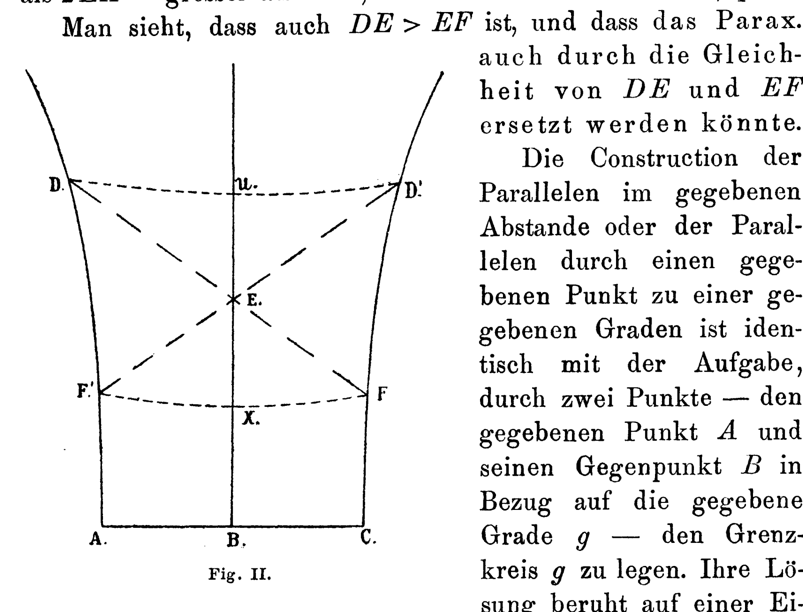


Fig. II.

Die Construction der Parallelen im gegebenen Abstande oder der Parallelen durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Graden ist identisch mit der Aufgabe, durch zwei Punkte — den gegebenen Punkt A und seinen Gegenpunkt B in Bezug auf die gegebene Grade g — den Grenzkreis g zu legen. Ihre Lösung beruht auf einer Eigenschaft der Parallelen, welche auch in der gewöhnlichen Geometrie vorhanden ist. Sei g die Grade, A der Punkt, AB das von A auf g gefällte Loth, C ein beliebiger Punkt auf g, CD senkrecht BC, AD senkrecht CD (Winkel BAD spitz); dann schneidet die durch C gezogene Abstandslinie zur Axe AB von der durch A gehenden Parallele ein Stück ab, welches gleich AD ist. Der Beweis ist von Bolyai und Lobatschewsky trigonometrisch geliefert worden. Der Satz kann auch etwas anders ausgesprochen werden. Construirt man zu ein und derselben Axe die verschiedenen Abstandslinien nach derselben Seite, und nennt entsprechende Punkte die Punkte, in denen derselbe Abstand die verschiedenen Linien schneidet; dann hat man den Satz: Fällt man

von einem Punkte A der Axe auf die Tangenten in den entsprechenden Punkten einer Schaar coaxialer Abstandslinien die Lothe und schlägt um A mit diesen Lothen Kreise, so liegen die Schnittpunkte der Kreise und der Abstandslinien in einer (durch A gehenden) graden Linie*. Die Aufgabe: Wenn zwei parallele Strahlen gegeben sind, zu einem gegebenen Punkt A auf der einen den entsprechenden Punkt B auf der andern zu finden, löst sich mit Benutzung des Umstandes, dass die Winkelhalbirende als Ort der Punkte gleichen Abstands von den Schenkeln auch in absoluter Geometrie erhalten bleibt, und zwar auch wenn es sich um die Fläche zwischen zwei Nichtschneidenden (Sattel?) handelt. Gegeben die Strahlen g und h und auf g Punkt A. Ziehe zu g nach der Seite von h und zu h nach der Seite von g zwei Abstandslinien im gleichen Abstand, schneiden sich in P; fälle von P auf g und h die Lothe PQ und PR, halbire QPR, fälle von A das Loth auf diese Halbirungslinie, trifft h in B; so ist B der gesuchte Punkt des durch A gehenden Grenzkreises, dessen Radien g und h sind. — Mit Benutzung der eben gelösten Aufgabe wird auch die Umkehrungsaufgabe gelöst: Zu einem gegebenen Winkel w als Parallelwinkel den Abstand zu finden oder, was dasselbe, den Schnitt des Grenzkreises, der durch den Scheitel geht, und dessen Radius der eine Schenkel ist, mit dem andern Schenkel zu bestimmen. Sei A der Scheitel des Winkels; ich bestimme wie oben einen entsprechenden Punkt B; dann ist die Aufgabe identisch mit der Aufgabe der gewöhnlichen Geometrie: Gegeben zwei Punkte A und B eines Kreises

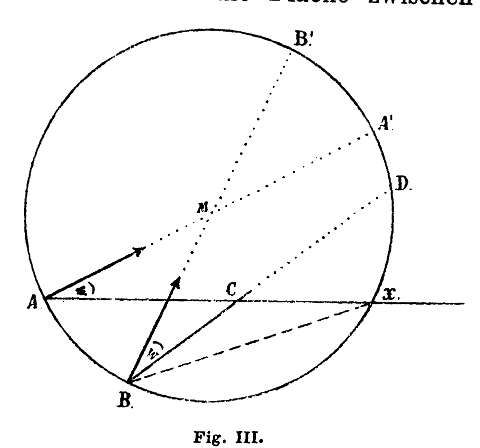


Fig. III.

* Ich bedaure, feststellen zu müssen, dass Frischauf bei der Parallelenconstruction in § 67 der «Elemente der absoluten Geometrie» das von A auf CD zu fällende Loth mit dem in A auf AB errichteten verwechselt hat.

und die Radien nach dem unzugänglichen Mittelpunkt M oder ∞; es soll der Schnitt einer durch A gezogenen Graden mit dem Kreise bestimmt werden. Aus der Figur III erhellt sofort, wenn man MBC gleich w macht, die Gleichheit der Bogen AB und DX daraus, dass BC gleich CX, wodurch X bestimmt ist.

Da sich die Note zu einer Einleitung in die absolute Geometrie entwickelt hat, so will ich die grundlegenden Sätze über die Parallele unabhängig von der Benutzung des unendlich fernen Punktes entwickeln. Sei g eine Grade, deren beide Richtungen von einem bestimmten Punkt aus ich durch $g +$ (rechts) und $g -$ (links) unterscheiden will; P ein Punkt ausserhalb derselben. Man fällt von P auf g das Loth PF und lasse den Strahl PF sich aus dieser Lage um P ganz herum drehen, z. B. von rechts nach links. Der bewegliche Strahl wird g anfangs rechts von F schneiden, dann aufhören zu schneiden, da er schon senkrecht auf PF sicher nicht mehr schneidet, dann auf der linken Seite schneiden und schliesslich mit PF wieder zusammenfallen. Auf jeder Seite von PF giebt es eine Grenzlage, welche die Schneidenden von den Nichtschneidenden scheidet. In dieser Grenzlage heisst der Strahl Parallelstrahl. Durch jeden Punkt P gehen also zu jeder Graden zwei Parallelstrahlen, welche als rechter und linker (p_+ und p_-) unterschieden werden; sie liegen symmetrisch zu PF und ihre Verlängerung nach rückwärts ebenso zu der Senkrechten in P auf PF. Diese beiden Strahlen können wie g selber eine Grade bilden — p —; das Parax. sagt, dass sie es müssen. Bilden p_+ und p_- eine Grade, so giebt es nur eine g Nichtschneidende (Grade) durch P, und also steht p in P auf PF senkrecht. Satz: Ist p_+ parallel g_+ und Q ein Punkt auf p_+, so ist p_+ auch q_+. Liegt Q rechts von P, so ist p_+ jedenfalls Nichtschneidende zu g_+ durch P, und es müsste q_+ jedenfalls zwischen p_+ und g_+ liegen; verbinde ich einen Punkt X auf q_+ mit P, so wäre PX Nichtschneidende durch P zu g unterhalb p_+. Liegt Q links von P, also auf der Verlängerung von p_+ nach rückwärts, dann ist QP auch eine Nichtschneidende zu g, q_+ müsste zwischen p_+ und g_+ liegen, der Parallelstrahl durch P zu q_+ müsste zwischen QP und q_+ liegen, da p_+ sicher q_+ nicht schneidet; dieser Parallelstrahl wäre aber schon für g_+

ein Nichtschneidender. Folgerung: Zwei Strahlen, welche derselben dritten nach derselben Seite parallel sind, sind unter einander parallel; und: Wenn für irgend einen Punkt P die beiden Parallelstrahlen durch P zu irgend einer Graden g eine Grade p bilden, so gilt die euclidische Geometrie, denn p und g bilden, da für jeden Punkt auf p die beiden Strahlen zusammenfallen müssten, einen Streifen der gewöhnlichen Geometrie. Von nun ab wird dieser Fall ausgeschlossen. Satz: «Die Abstände der Punkte auf p_+ von g_+ nehmen fortwährend ab», wird bewiesen mittelst der Axe zu den Fusspunkten zweier Abstände auf g, welche bei Gleichheit der Abstände auf p_+ senkrecht stände und, wenn der folgende grösser als der vorige, eine Nichtschneidende unterhalb p_+ liefern würde. Nennt man die Grade, welche das Bündel der g Nichtschneidenden durch P halbirt und also auf PF senkrecht steht, die Haupt-Nichtschneidende (k) durch P zu g, und PF den Hauptabstand, so haben wir den wichtigen Satz: Die Abstände der Haupt-Nichtschneidenden nehmen nach beiden Seiten des Hauptabstandes fortgesetzt zu; je zwei zum Hauptabstand symmetrisch liegende sind gleich. Das letztere folgt durch Klappen um PF sofort; wären ausser den zu PF symmetrisch liegenden noch zwei gleiche Abstände vorhanden, so hätten wir einen zweiten Hauptabstand und damit ein Rechteck. Es können daher die Abstände nach beiden Seiten von PF entweder fortgesetzt fallen oder fortgesetzt steigen. Im ersten Falle müssten die Nichtschneidenden entweder sich schneiden oder parallel sein, denn selbst wenn der Abstand nicht unter eine Grenze g sinken würde, müsste das Fallen sich so verlangsamen, dass wir die Abstände auf merkbare Entfernung der Fusspunkte als gleich ansehen müssten, d. h. wir hätten die Parallele der euclidischen Geometrie. Folgerung: Je zwei Nichtschneidende haben einen kürzesten Abstand. Wir sehen, die Strahlen durch P zwischen k_+ und p_+ stehen auf den auf g_+ sich von PF entfernenden Lothen der Reihe nach senkrecht, die Lothe selbst werden fortgesetzt kleiner. Satz: Wenn sich eine Grade der andern nähert, so nähert sie sich beständig langsamer bezw. entfernt sich immer schneller. Beweis wie oben. Folgerung: Der Abstand

hat keine obere Grenze. Folgerung: Der Abstand der Parallelen hat die untere Grenze 0. Beweis: Wäre s die Grenze, so könnte man im Abstand s zu g_+ die Parallele ziehen, und dann müssten auf dieser die Abstände kleiner als s werden, dagegen nach rückwärts beständig wachsen; es würde also der Abstand $P'F'$ gleich PF vorkommen, und dann kann die Figur so verschoben werden, dass $P'F'$ und PF sich decken. In Folge dieser Sätze ist es gestattet, zu sagen: Parallelstrahlen haben den unendlich fernen Punkt gemeinsam, und es folgt direct, dass, wenn p_+ parallel g_+, auch g_+ parallel p_+ ist.

3. Das Analogon der Breite ist im Winkel der Kreisbogen, dessen Centrum der Scheitel ist, der zwar nicht selbst constant bleibt, aber dessen Verhältniss zur Gesammtbreite an der entsprechenden Stelle sich nicht ändert.

Kapitel III, 1. Die beiden Umkehrungen in 11 und 8 werden gewöhnlich ohne Rücksicht auf die sämmtlichen Möglichkeiten bewiesen.

Kapitel IV, 1. Obwohl der Streifen kein angebbarer Bruchtheil der Ebene und der Winkel ein angebbarer ist, so kann darum doch nicht behauptet werden, dass der Streifen keinen Winkel enthalten kann; die Begriffe «Grösser, Kleiner, Gleich» beruhen auf der Vergleichbarkeit, und diese ist zwischen Winkel und Streifen nicht vorhanden, auch nicht durch Vermittelung der Ebene, weil der Streifen kein Theil der Ebene*.

2. Vom Messen. Da in «Elemente der Arithmetik» der Abschnitt 8 vom Rechnen mit benannten Zahlen etwas sehr knapp gefasst ist, so mag diese Note zugleich als Ergänzung dienen. Ausserdem macht der Begriff «Verhältniss» notorisch den Schülern die bei weitem grösste Schwierigkeit, und mit Recht, denn im Grunde ist jedes Verhältniss continuirlicher Grössen ein Rechnen mit den Cantor'schen oder transfiniten Zahlen, da die Mass Strecke, — Masse — Zeit etc. aus unendlich vielen (ω) Linien-, Massen-, Zeit-Elementen zusammengesetzt ist. Im Abschnitt 8 der Elemente ist kurz gesagt: «Der Begriff der Grösse schliesst die Theilbarkeit ein»; ich will dies dahin erläutern, dass ich unter «Grösse» überhaupt nichts anderes verstehe als das Be-

---

* Simon: Elemente der Arithmetik, S. 76, Anmerkung.

wusstsein der Zusammengesetztheit einer Vorstellung, ohne dass die Art und Weise der Zusammengesetztheit deutlich ist. Dadurch unterscheidet sich der Begriff Grösse von dem der Zahl. Während die neue Vorstellung sich aufdrängt, kann und ist meist die alte Vorstellung noch vorhanden, wenn auch, um mit Herbart zu reden, gehemmt. Das Bewusstsein dieses Umstandes wird selbst zur Vorstellung und liefert zunächst die Zahl der Zahlen, die Zwei. Mittelst der Zahlenreihe schaffen wir die Möglichkeit, eine beliebige aber bestimmte Reihe von Vorstellungen festzuhalten. Wächst die Zahlenreihe mehr und mehr, so geht die Deutlichkeit und damit der Zahlbegriff mehr oder minder schnell verloren, der Grössenbegriff tritt ein. Daher sind das unendlich Grosse sowie das unendlich Kleine keine Zahl-, sondern Grössenbegriffe. Umgekehrt, will man bei der Grössenvorstellung die Art und Weise der Zusammensetzung deutlich machen, so geht sie in Zahlvorstellung über. Der Grenzbegriff ist nichts anderes als der Ausdruck oder, wenn man will, der Ausgleich der Incongruenz zwischen Grösse und Zahl. Will man die beiden Zahlenreihen aufstellen, deren obere und untere Grenze $\sqrt{7}$ ist, so werden wir mehr oder minder schnell müde, die Zahlen aus einander zu halten; die Deutlichkeit hört auf, die Grössenvorstellung tritt ein, und nun sehen wir die folgenden Glieder der Reihen ruhig als gleich an. Die Gleichung $x + dx = x$, für Zahlen völlig widersinnig, ist für Grössen ihrer Natur nach berechtigt und zulässig, und dabei ist es, wie schon Hoüel bemerkt, völlig sinnlos, das dx durch eine mikroskopische Strecke abzubilden. Die Gleichartigkeit der Theile ist für den Begriff Grösse an sich nicht erforderlich, doch beschränken wir uns im Allgemeinen auf solche; ist die Theilbarkeit uneingeschränkt, so haben wir continuirliche oder stetige Grössen, wie in Geometrie und Mechanik. Aus der uneingeschränkten Theilbarkeit folgt in derselben Weise wie für die Halbirung durch Grenzprocess die Theilung in beliebig viele gleiche Theile. Das Messen ist eine Verbindung von Zahl und Grösse. Die Art und Weise der Zusammengesetztheit des Masses lassen wir dahingestellt sein, dagegen wird das zu Messende in eine bestimmte Anzahl dem Masse gleicher Vorstellungen aufgelöst und dadurch zur Zahlengrösse oder benannten Zahl. Um mit

solchen Grössen einer bestimmten Art nach den gewöhnlichen Regeln, welche für Zahlen gelten, rechnen zu können, sind drei Voraussetzungen nöthig: 1. die Vergleichbarkeit d. h. die Möglichkeit, die Grössen in eine Reihe zu ordnen, d. h. von je zweien die drei Grund-Zahlbegriffe: grösser, kleiner, gleich, festzustellen; 2. das commutative Gesetz $(a + b) = (b + a)$ und 3. das associative $a + (b + c) = (a + b) + c$. Die beiden letzteren lassen sich zusammenziehen in das eine Princip: Zwei Grössen sind gleich, wenn sie aus gleichen Theilen in beliebiger Reihenfolge bestehen. Für Strecken ist die Voraussetzung 1 in dem Axiom E. 1 ausgesprochen; Voraussetzung 2 in dem Axiom 1 $(AB = BA)$; 3 entnehmen wir aus der Anschauung, was für Strecken zulässig, da bei der Zusammensetzung die Form erhalten bleibt. Für Streifen folgen sie aus der Congruenz der Streifen von gleicher Breite. Für gradlinig begrenzte Flächen braucht man sie in Folge des Pythagoras nur für Quadrate zu beweisen. Die Voraussetzung 1 folgt aus der Congruenz zweier Quadrate von gleicher Seite und

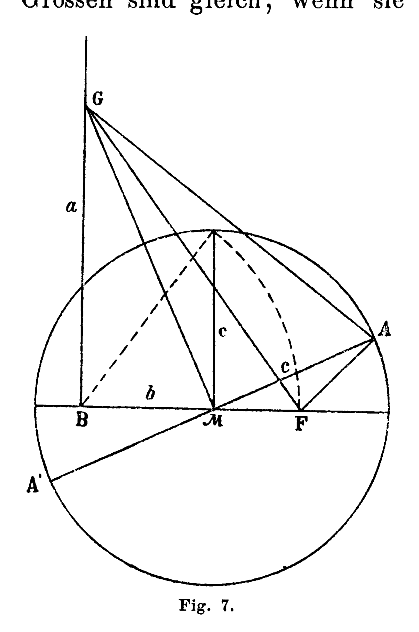


Fig. 7.

dem Satz $(\overline{a + b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\,\overline{ab}$; Voraussetzung 2: $(\bar{a}^2 + \bar{b}^2) = (\bar{b}^2 + \bar{a}^2)$ aus dem ersten Congruenzsatz, da die Hypotenusen der beiden rechtwinkligen Dreiecke $\bar{a}, \bar{b}; \bar{b}, \bar{a}$ gleich sind. Voraussetzung 3 beweist sich sofort durch Hineingehen in den Raum, da das Quadrat der Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten a, b, c ebenso gut $a^2 + (b^2 + c^2)$ als $(a^2 + b^2) + c^2$ ist. Es dürfte aber nicht uninteressant sein, dass planimetrisch dieser Satz sich u. a. auch mit einem der einfachsten aus der Potenzlehre deckt und daher durch Zurückführung auf die betreffenden Sätze für Strecken bewiesen werden kann. In der obenstehenden Figur ist $GM^2 = (a^2 + b^2)$;

$GF^2 = a^2 + (b^2 + c^2)$; $GA^2 = (a^2 + b^2) + c^2$. Da die Strecke a an und für sich ganz willkürlich, so sieht man, dass die Gleichheit von GF und GA, um welche es sich handelt, identisch ist mit der Thatsache, dass das in M auf MA errichtete Loth und die Axe von F/A, wie auch der Radius MA sich dreht, sich auf ein und derselben Graden schneiden (welche dann selbstverständlich in B auf BF senkrecht steht); also dass, während M und F fest bleiben und A den Kreis mit dem Radius C durchläuft, G sich auf einer Graden bewegt. Da aber GM die Axe von A/A_1 ist, so ist der zu beweisende Satz $GF = GA$ identisch mit dem bekannten Satze: Alle Kreise, welche einen festen Kreis unter seinem Durchmesser schneiden und durch den festen Punkt F gehen, bilden ein Kreisbüschel (schneiden sich noch in einem zweiten festen Punkt F^1). Der Satz ist eine unmittelbare Folge davon, dass $MF \,.\, MF^1 = c^2$ ist. —

Für Curven halten wir die drei Voraussetzungen erfüllt, wenn wir annehmen, dass dieselben ohne Dehnung gebogen werden können, d. h. dass die Linienelemente ihre Richtung beliebig ändern können, ohne sich selbst zu ändern. Für Curven, krummlinig begrenzte Flächen und Körper wird der betreffende Nachweis eigentlich erst in der Differentialrechnung geführt. Was die Masseinheiten betrifft, so hat die euclidische Geometrie kein natürliches Längen- und damit auch kein Flächenmass. Die nichteuclidische hat es an der Strecke k, für welche das Verhältniss zweier coaxialer Grenzbogen gleich e ist. Das Flächenmass ist dann das Quadrat auf der Grenzfläche, dessen Seite k, oder ebenso gut der constante Inhalt eines Streifens. Da der Grenzbogen sich durch Construction der Mittelsenkrechten halbiren lässt, also auch in 2^n Theile theilbar, da ferner die Grenzbogen sich auf einander legen lassen wie Strecken, so lässt sich das Verhältniss zweier coaxialer Grenzbogen darstellen als Zahl von der Form $a + \sum_1^\infty \frac{n_k}{2^k}$, wo n_k die Werthe 0 oder 1 haben kann; und da das Verhältniss eine continuirliche Function des Abstandes, so lässt sich die Einheitsstrecke mit der Genauigkeit, die unsern Massen gleichkommt, construiren. Andere Bestimmung bei Bolyai S. 38. Ich gehe nun zu den

Sätzen über das Verhältniss unter den drei Voraussetzungen über.

1. Begriff des Masses im engeren Sinne. Wenn Vorstellungen in bestimmten Beziehungen einander ersetzen können, wie z. B. die einzelnen Markstücke hinsichtlich ihrer Kaufkraft, so heissen sie in dieser Beziehung einander gleich; erstreckt sich die Ersetzbarkeit auf sehr viele Beziehungen, wie z. B. bei zwei Markstücken von derselben Prägung, so nennt man sie schlechtweg gleich; eine absolute Gleichheit giebt es ausser der Identität nicht. Das Congruenzaxiom sagt aus, dass sich zu jeder geometrischen Vorstellung unzählig viele andere denken lassen, welche jene in allen Beziehungen, abgesehen von der Lage, ersetzen können, oder kurz, dass die geometrischen Vorstellungen beliebig oft wiederholt werden können. Die Umkehrung, dass jede Raumgrösse auch als beliebig Vielfaches angesehen werden kann, ist bereits erörtert worden. Die Sätze, welche wir entwickeln, beziehen sich nur auf die Ersetzbarkeit hinsichtlich der bestimmten Beziehung auf die eigenthümliche Grössenart, Länge als Summe der Linienelemente, Fläche von Streifen als Summe der Streifen etc., Raumstreifen, Massen, Zeiten etc. Beispielsweise kann ich aus Verdoppelung desselben rechtwinkligen Dreiecks Rechtecke oder gleichschenklige Dreiecke erhalten, welche in sehr vielen Beziehungen verschieden sind, doch in Bezug auf die Fläche sich gegenseitig ersetzen können, d. h. im Grunde auf die Summe ihrer Flächenelemente, welche als unendlich kleine Quadrate zu denken sind; dabei ist eigentlich vorausgesetzt, dass, obwohl die Anzahl der Elemente in jeder endlichen Fläche eine unendliche, sie doch eine bestimmte Zahl, d. h. also eine transfinite sei. Ist g aus $n$facher Wiederholung von γ entstanden oder kann entstanden gedacht werden, wie z. B. irgend ein Streifen des Systems aus dem Grundstreifen, so heisst γ ein Mass von g, n die Masszahl von g, gemessen durch γ, oder das Verhältniss von g zu γ. $(g:\gamma) - g = \gamma \cdot n$. Dass $\gamma \cdot n$ kein Product im arithmetischen Sinne, hat bereits Hankel hervorgehoben; man vergleiche auch die schon angeführten Aufsätze von Kerry.

2. Ist $g = \gamma \cdot n$ und $g = \gamma_1 \cdot n$, so ist $\gamma = \gamma_1$. Wäre $\gamma = \gamma^1 + \varepsilon$, so wäre $\gamma + \gamma = \gamma^1 + \varepsilon + \gamma^1 + \varepsilon$; nach dem associa-

tiven Gesetz ist $(\gamma^1 + \gamma^1 + \varepsilon) + \varepsilon = 2\gamma^1 + 2\varepsilon$, also $2\gamma \mp 2\gamma^1$ etc. $\gamma \cdot n \mp \gamma_1 \cdot n$.

3. Ist $g = \gamma \cdot r$ und $g_1 = \gamma \cdot s$, so sagen wir, g und g_1 haben das gemeinschaftliche Mass γ, und mit Erweiterung des Begriffs Mass und Masszahl, g^1 sei ein Mass von g, die Masszahl sei $\frac{r}{s}$. $(r : r = s : s = 1)$. Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$, so ist $g_1 : g = \frac{s}{r}$.

4. Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$, so ist $g \cdot s = g_1 r$ und umgekehrt. (Associatives Gesetz.)

5. Ist $g = \gamma \cdot n$ und $\gamma = \delta \cdot r$, so ist auch δ ein Mass für g und $g : \delta$ oder $g : \frac{\gamma}{r} = nr \cdot$ Es ist $g = (\delta\, r) \cdot n = \delta\, (n\, r)$ nach dem vorigen Princip. Ist $g_1 = g \cdot r$ und $g = \gamma \cdot n$, so ist $g_1 : \gamma = nr$; denn $g_1 = gr = (\gamma n)\, r = \gamma\, (nr)$, also $g : \frac{\gamma}{r} = gr : \gamma$.

6. Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$ und $g : g_1 = \frac{\varrho}{\sigma}$, so ist $\frac{r}{s} = \frac{\varrho}{\sigma}$. Beweis siehe Text Kapitel IV, Absatz 2, 2. Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$ und $\frac{r}{s} = \frac{\varrho}{\sigma}$, so ist $g : g_1 = \frac{\varrho}{\sigma}$.

Es folgen die schon im Text bewiesenen Sätze:

6. $ng : ng_1 = \frac{g}{s} : \frac{g_1}{s} = g : g_1$ und

7. Ist $g : g_1 = \frac{r}{s}$ und d der grösste gemeinschaftliche Theiler von r und s, so ist $\left(\frac{g}{r}\right) \cdot d$ oder $\left(\frac{g_1}{s}\right) \cdot d$ das grösste gemeinschaftliche Mass von g und g_1.

8. g und g_1 können incommensurabel sein. Nach Einführung der Reihenzahlen begründet man den Hauptsatz, der der ganzen Lehre vom Verhältniss implicite zu Grunde liegt: Je zwei Grössen g und g_1 haben ein bestimmtes Verhältniss, das sich, weil g_1, $2g_1$ etc. eine stets wachsende Reihe bilden, in der Form der Reihenzahl $\alpha = a + \frac{k}{p} + \frac{k_1}{pp_1} + \frac{k_2}{p\,p_1\,p_2} \cdots\cdots$ (El. S. 38) entwickeln lässt, wobei p_ν völlig willkürlich, nur

der Bedingung $k_\nu < p_\nu$ unterworfen sind. Ist $g : g_1 = \alpha$ und $g : g_1 = \beta$, so ist $\alpha = \beta$. Ersetzt man (E. S. 38, 8) α durch α_n und β durch β_n, so folgt aus dem Bildungsprocess: $g = g_1 \alpha_n$ und $g = g_1 \beta_n$ (wo die Gleichheit in dem erweiterten Sinn $g + \varepsilon = g$ zu nehmen), also $\alpha_n = \beta_n$; $\alpha = \beta$.

Ist M eine ganz willkürliche Grösse gleicher Art, und ist $g : M = \alpha$; $g_1 : M = \beta$, wo α oder β oder beide, Reihenzahlen, so ist $g : g_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, vorausgesetzt, dass $\frac{\alpha}{\beta}$ einen Sinn hat, d. h. $\beta \neq 0$; $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ (El. S. 32, 10); $\frac{g}{\alpha_k} = \frac{g_1}{\beta_k}$; $g : g_1 = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha}{\beta}$. Damit ist dann wie im Text bewiesen, dass $g : g_1 = \frac{g}{g_1}$, und es wiederholt sich der betreffende Zusatz.

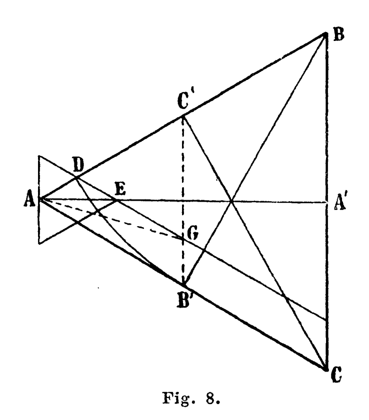


Fig. 8.

IV, 2, 4. Es genügt der Nachweis der Incommensurabilität von Höhe h und halber Seite a_1. Sei ABC das gleichseitige Dreieck, $A_1 B_1 C_1$ die Höhenfusspunkte. Trage die Höhe BB_1 von B aus auf AB ab bis D, und ziehe durch D die Parallele zu AC (schneidet $B_1 C_1$ in G); die Höhe AA_1 schneidet DG in E. Alsdann ist $DC^1 = h - a_1 = r_1$ und ED gleich AD gleich $a_1 - r_1$ gleich r_2. Da DC^1G ein gleichseitiges Dreieck und ADE gleichschenklig, so ist $EG = r_1 - r_2 = r_3$. Nun ist auch AEG gleichschenklig, da $ADGB^1$ ein symmetrisches Trapez, also GAB^1 gleich GDB^1 gleich 15^0, also EAG auch 15^0, also AE gleich $r_1 - r_2$ gleich r_3, und da AD gleich r_2 und da ADE ein Dreieck wie $C_1 B^1 B$, d. h. da r_3 und r_2 wieder Höhe und halbe Seite desselben gleichseitigen Dreiecks, so ist die Incommensurabilität bewiesen.

Strassburger Druckerei und Verlagsanstalt, vorm. R. Schultz u. Co. — 3934.





3 2044 070 898 952


3 2044 070 898 952